Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 8: Lineare Algebra
8.2 Determinanten

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

8. Lineare Algebra: 2. Determinanten

- Ein einführendes Beispiel
- Zweireihige Determinanten
  - Eigenschaften zweireihiger Determinanten
- Dreireihige Determinanten
  - Definition
  - Berechnung einer 3-reihigen Determinante nach Sarrus
  - Rechenregeln für 3-reihige Determinanten
  - Entwicklung einer dreireihigen Determinante nach Unterdeterminanten (Laplacescher Entwicklungssatz)
- Determinante höherer Ordnung
  - Definition einer n-reihigen Determinante
  - Regeln zur praktischen Berechnung einer n-reihigen Determinante

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 23 - 53,**
  Seiten 148 - 151 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Ein einführendes Beipiel

Bei der Lösung narturwissenschaftlich-technischer Probleme stösst man immer wieder auf *lineare Gleichungssysteme*.
Es stellt sich dabei sofort die Frage nach der *Lösbarkeit* eines solchen Systems:

1. Ist das vorliegende lineare Gleichungssystem überhaupt *lösbar*?
2. Falls *ja*, wie lauten die *Lösungen* des Systems?

Bei der Beantwortung dieser Fragenstellungen erweist sich eine gewisse mathematische Grösse, die die Bezeichnung "*Determinante*" erhält, als ein ausserordentlich nützliches Hilfsmittel.
Zur Einführung des Determinantenbegriffes betrachten wir das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2
\end{aligned}
$$

(Hier sind a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sowie c_1 und c_2 gegeben, und gesucht sind Lösungen für x_1, x_2, die beide Gleichungen erfüllen.)

Ein einführendes Beipiel

Es soll nun untersucht werden, unter *welchen* Voraussetzungen dieses Gleichungssystem *eindeutig* lösbar ist, d.h. genau *eine* Lösung besitzt.
Dazu eliminieren wir zunächst die Unbekannte x_2 in der ersten Gleichung, und die Unbekannte x_1 in der zweiten Gleichung :

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= c_1 a_{22} - c_2 a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= c_2 a_{11} - c_1 a_{21} \end{aligned}$$

Falls $a_{11}a_{22} - a_{12}x_{21} \neq 0$ ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem die *eindeutige Lösung*

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{c_2 a_{11} - c_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Ein einführendes Beipiel

Die aus den vier Elementen der *Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ berechnete Grösse

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

wird allgemein als *2-reihige Determinante* bezeichnet.
Unter Verwendung des Determinantenbegriffes können wir damit die folgende Bedingung für die *eindeutige Lösbarkeit* eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten formulieren:

Aussage zur eindeutigen Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt *genau eine* Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante *nicht verschwindet*.

Zweireihige Determinanten

Definition

Unter der *Determinante* einer 2-reihigen, quadratischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ versteht man die Zahl

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Zweireihige Determinanten

Anmerkungen

- Weitere symbolische *Schreibweisen* für die Determinante einer 2-reihigen Matrix **A** sind

$$D, \ \det \mathbf{A}, \ |\mathbf{A}|, \ |a_{ik}|$$

- D heisst auch 2-*reihige Determinante* oder *Determinante 2. Ordnung*.
- Die *Anordnung* der Elemente in einer Matrix **A** und in der ihr zugeordneten Determinante det **A** erfolgt in *gleicher* Weise:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Determinanten können nur aus *quadratischen* Matrizen gebildet werden (hier 2-reihige Matrizen).

Berechnung einer 2-reihigen Determinante

Berechnung einer 2-reihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

——— Hauptdiagonale

- - - - - Nebendiagonale

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ist gleich dem Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente minus dem Produkt der beiden Nebendiagonalelemente.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot (-2) = 22$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 1

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ändert sich beim Transponieren der Matrix *nicht*:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathsf{T}}.$$

Beweis:

Durch direkte Berechnung der Determinante erhalten wir

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

erhalten wir:

$$\det \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Der Wert der Determinante hat sich dabei *nicht* geändert.

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 2

Beim Vertauschen der beiden Spalten (oder Zeilen) ändert eine 2-reihige Determinante ihr *Vorzeichen*:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \\ &= -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 3

Werden die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante mit einem reellen Skalar λ *multipliziert*, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Beweis:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir multiplizieren die Elemente der *1. Zeile* der Determinante mit dem Skalar λ und erhalten:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (\lambda a_{11}) \cdot a_{22} - (\lambda a_{12}) \cdot a_{21} \\ &= \lambda \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir die Elemente der *2. Zeile* mit λ multiplizieren.

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 4

Eine 2-reihige Determinante wird mit einem reellen Skalar λ *multipliziert*, indem man die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

Regel 5

Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante einen *gemeinsamen* Faktor λ, so darf dieser *vor* die Determinante gezogen werden.

Beispiel

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -8 \cdot 3 & 7 \\ -8 \cdot 4 & 1 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -8 \cdot (3 \cdot 1 - 7 \cdot 4) = -8 \cdot (-25) = 200 \end{aligned}$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 6

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein *beliebiges* Vielfaches der *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) elementweise addiert.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11} + \lambda a_{21}) \cdot a_{22} - (a_{12} + \lambda a_{22}) \cdot a_{21} \\ &= \det \mathbf{A} \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir zur *2. Zeile* das λ-fache der 1. Zeile addieren.

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 7

Eine 2-reihige Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind *Null*.
2. Beide Zeilen (oder Spalten) stimmen *überein*.
3. Die Zeilen (oder Spalten) sind zueinander *proportional*.

Beweis. Zu 1:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0a_{22} - 0a_{21} = 0$$

Zu 3:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} a_{12} - a_{12} \lambda a_{11} = 0$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 8: Multiplikationstheorem für Determinanten

Für zwei 2-reihige Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt stets

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

d.h. die Determinante eines *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist gleich dem *Produkt* der Determinanten der beiden Faktoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Determinante des *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ geschieht am einfachsten nach dem *Multiplikationstheorem* (**Regel 8**). Wir erhalten

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 = -22$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 10$$

und somit:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{vmatrix} = 14 \cdot (-17) - 1 \cdot (-18) = -220 \\ &= \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \end{aligned}$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Regel 9

Die Determinante einer 2-reihigen *Dreiecksmatrix* **A** besitzt den Wert

$$\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22}$$

d.h. die Determinante einer *Dreiecksmatrix* ist gleich dem *Produkt der Hauptdiagonalelemente*.

Beweis:

Wir beweisen **Regel 9** für eine *obere* Dreiecksmatrix:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

Anmerkung

- Die Einheitsmatrix **E** und die Nullmatrix **0** sind als Diagonalmatrizen *Sonderfälle* der Dreiecksmatrizen.

  Für sie gilt daher:

$$\det \mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det \mathbf{0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Definition einer dreireihigen Determinante

Auf *3-reihige* Determinanten stösst man beispielweise, wenn man ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten vom Typ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

auf seine *Lösbarkeit* untersucht.

Definition einer dreireihigen Determinante

Wir werden später zeigen, dass ein solches System nur dann genau *eine* Lösung besitzt, wenn der aus den Elementen der 3-reihigen *Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gebildete Term

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

einen von Null *verschiedenen* Wert besitzt.

Die Zahl D heisst *Determinante* von $\mathbf{A}$.

Definition einer dreireihigen Determinante

Definition

Unter der *Determinante* einer *3-reihigen*, quadratischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ versteht man die Zahl

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Anmerkung

- Die Determinante D heisst auch *3-reihige Determinante* oder *Determinante 3. Ordnung*.
  Gebräuchliche Schreibweisen sind:

$$D, \ \det \ \mathbf{A}, \ |\mathbf{A}|, \ |a_{ik}|$$

Berechnung einer Determinante nach Sarrus

Berechnung einer Determinante nach Sarrus (Regel von Sarrus)

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & & & - & - \quad - \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 & & & + & + \quad +
\end{array}
$$

—— Hauptdiagonalprodukte

- - - Nebendiagonalprodukte

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Die Spalten 1 und 2 der Determinante werden nochmals rechts, neben die Determinante gesetzt. Den Determinantenwert erhält man dann, indem man die drei Hauptdiagonalprodukte addiert und von dieser Summe die drei Nebendiagonalprodukte subtrahiert.

Berechnung einer Determinante nach Sarrus

Beispiel

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & - & - & - \\
1 & -2 & 7 & 1 & -2 & \\
0 & 3 & 2 & 0 & 3 & \\
5 & -1 & 4 & 5 & -1 & \\
 & & & + & + & +
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \cdot 5 + 7 \cdot 0 \cdot (-1) - 7 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 0 \cdot 4 \\
&= -111
\end{aligned}
$$

Rechenregeln für 3-reihige Determinanten

Rechenregeln für 3-reihige Determinanten

Für *3-reihige* Determinanten gelten *sinngemäss* die gleichen Rechenregeln wie für *2-reihige* Determinanten (Regel 1 bis Regel 9).

Beispiel

- Regel 7: $$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \\ -6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Begründung: die Spalten 1 und 2 sind zueinander *proportional* (Faktor 2). Nach **Regel 7** besitzt die Determinante daher den Wert *Null*.

Rechenregeln für 3-reihige Determinanten

Beispiel

- Regel 8:
  Wir berechnen unter Verwendung des *Multiplikationstheorems* und der Regel von *Sarrus* die Determinante des Matrizenproduktes $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ mit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} , \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} , \\
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -4 & -8 & -3 \\ 13 & 42 & 5 \\ 8 & 42 & 6 \end{pmatrix} \\
\det \mathbf{A} &= 19 \ , \ \det \mathbf{B} = -26 \ , \ \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -494
\end{aligned}
$$

Entwicklung einer 3-reihigen Determinante

Definition

- Die aus einer 3-reihigen Determinante D durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte entstehende 2-reihige Determinante heisst *Unterdeterminante* von D und wird durch das Symbol D_{ik} gekennzeichnet $(i, k = 1, 2, 3)$.
- Die mit dem *Vorzeichenfaktor* $(-1)^{i+k}$ versehene Unterdeterminante D_{ik} wird als *algebraisches Komplement* A_{ik} des Elementes a_{ik} in der Determinante D bezeichnet.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$$

Entwicklung einer 3-reihigen Determinante

Beispiel

Gegeben ist die *3-reihige* Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Wir berechnen die *Unterdeterminanten* D_{11}, D_{23} und die zugehörigen *algebraischen Komplemente* A_{11},A_{23}:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = -17$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -1$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Ansatz:

$$
\begin{aligned}
D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= a_{11}\underbrace{\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)}_{D_{11}} - a_{12}\underbrace{\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right)}_{D_{12}} + a_{13}\underbrace{\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)}_{D_{13}} \\
&= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\underbrace{\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)}_{D_{11}} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\underbrace{\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right)}_{D_{12}} \\
&+ a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\underbrace{\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)}_{D_{13}} \\
&= a_{11}A_{12} + a_{12}A_{11} + a_{13}A_{13}
\end{aligned}
$$

Dabei bedeuten:

$A_{ik} = (-1)^{i+k}\cdot D_{ik}$:	*Algebraisches Komplement* von a_{ik} in D
D_{ik} :	2-*reihige Unterdeterminante* von D
	(in D wird die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen)

Laplacescher Entwicklungssatz

Laplacescher Entwicklungssatz

Eine 3-reihige Determinante lässt sich nach jeder der drei Zeilen oder Spalten wie folgt *entwickeln*:

- **Entwicklung nach der i-ten Zeile:**

$$D = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_{ik} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

- **Entwicklung nach der k-ten Spalte:**

$$D = \sum_{i=1}^{3} a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Beispiel

Wir wählen die 2. *Zeile* als *Entwicklungszeile*.

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} \\
&= a_{21} \cdot A_{21} + \overbrace{a_{22}}^{0} \cdot A_{22} + a_{23} A_{23} \\
&= a_{21} \cdot (-1)^{2+1} D_{21} + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} D_{23} \\
&= -4 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\
&= -4 \cdot 17 - 2 \cdot 21 \\
&= -110
\end{aligned}
$$

Definition einer n-reihigen Determinante

Definition

Wir werden einer *n-reihigen* Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ eine *Zahl* zuordnen, die als *Determinante n-ter Ordnung* oder *n-reihige Determinante* bezeichnet und durch das Symbol

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gekennzeichnet wird.

Definition einer n-reihigen Determinante

Definition

Die Festlegung der *Zuordnungsvorschrift*

$$\mathbf{A} \mapsto \det \mathbf{A}$$

muss dabei so erfolgen, daß die bekannten Eigenschaften und Rechenregeln der 2- und 3-reihigen Determinanten auch für n-reihige Determinanten *unverändert* gültig bleiben.
Mit anderen Worten: *für Determinanten bestehen – unabhängig von der Ordnung – einheitliche Rechenregeln.*

Anmerkung

Der Wert einer *1-reihigen* Determinante wird wie folgt festgelegt:

$$\mathbf{A} = (a) \Rightarrow \det \mathbf{A} = a$$

Definition einer n-reihigen Determinante

Definition

Der Wert einer *n-reihigen Determinante* $D = \det \mathbf{A}$ wird *rekursiv* nach der "Entwicklungsformel"

$$D = \det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}$$

berechnet ("Entwicklung nach den Elementen der 1. Zeile "). Dabei bedeuten:

$A_{1k} = (-1)^{1+k} \cdot D_{1k}$:	*Algebraisches Komplement* von a_{1k} in D
D_{1k} :	$(n-1)$*-reihige Unterdeterminante* von D (in D wird die 1.Zeile und k-te Spalte gestrichen)

Definition einer n-reihigen Determinante

Anmerkungen

- Durch die "*Entwicklungsvorschrift*" wird einer n-reihigen quadratischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ ein Zahlenwert $\det \mathbf{A}$, die *Determinante* von $\mathbf{A}$, zugeordnet.
- Durch *wiederholte (rekursive)* Anwendung der allgemeinen Entwicklungsformel läßt sich eine *n-reihige* Determinante auf 3-reihige Determinanten zurückführen, deren Berechnung nach der *Regel von Sarrus* erfolgen kann.

Definition einer n-reihigen Determinante

Beispiel

Wir berechnen den Wert der *4-reihigen* Determinante

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

nach der "Entwicklungsvorschrift" und erhalten:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 123 - 5 \cdot 57 - 10 \cdot 9 \\ &= -252 \end{aligned}$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Laplacescher Entwicklungssatz

Eine *n-reihige* Determinante lässt sich nach den Elementen einer *beliebigen* Zeile oder Spalte wie folgt entwickeln:

- **Entwicklung nach der i-ten Zeile:**
  $D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (i = 1, 2, .., n)$
- **Entwicklung nach der k-ten Spalte:**
  $D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1, 2, .., n)$

Dabei bedeuten:

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$: *Algebraisches Komplement* von a_{ik} in D

D_{ik} : $(n-1)$*-reihige Unterdeterminante* von D
(in D wird die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen)

Laplacescher Entwicklungssatz

Anmerkungen

- Der Wert einer n-reihigen Determinante ist *unabhängig* von der Entwicklungszeile oder Entwicklungsspalte.
- *Grundsätzlich* gilt: es wird nach derjenigen Zeile oder Spalte entwickelt, die die *meisten* Nullen enthält.
- Der Vorzeichenfaktor im algebraischen Komplement A_{ik} kann wiederum nach der *Schachbrettregel* bestimmt werden.

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Regel 1 Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn die Matrix transponiert wird: $\det \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \det \mathbf{A}$.

Regel 2 Bei *Vertauschen* zweier Zeilen (oder Spalten) ändert eine Determinante ihr *Vorzeichen*.

Regel 3 Werden die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit einem reellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Regel 4 Eine Determinante wird mit einem reellen Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer *beliebiegen* Zeile mit λ multipliziert.

Regel 5 Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen *gemeinsamen* Faktor λ, so darf dieser *vor* die Determinante gezogen werden.

Rechenregeln für *n*-reihige Determinanten

Rechenregeln für *n*-reihige Determinanten

Regel 6 Eine Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1: Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind *Null*.

2: *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind *gleich* oder *proportional*.

3: Eine Zeile (oder Spalte) ist als *Linearkombination* der übrigen Zeilen (oder Spalten) darstellbar.

Regel 7 Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert.

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Regel 8 **Multiplikationstheorem für Determinanten**

Für zwei n-reihige Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt stets

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

d.h. die Determinante eines *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist gleich dem *Produkt* der Determinanten der beiden Faktoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

Regel 9 Die Determinante einer n-reihigen *Dreiecksmatrix* $\mathbf{A}$ besitzt den Wert

$$\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \ .$$

Anmerkungen

- Für eine *Diagonalmatrix* $\mathbf{A}$ gilt ebenfalls $D = \det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.
- $\det \mathbf{E} = 1$
- $\det \mathbf{0} = 0$

Regeln zur praktischen Berechnung einer n-reihigen Determinante

Elementare Umformungen einer Determinante

Die folgenden *elementaren Umformungen* verändern den Wert einer Determinante *nicht*:

1. Ein den Elementen einer Zeile (oder Spalte) *gemeinsamer* Faktor darf *vor* die Determinante gezogen werden.
2. Zu einer Zeile (oder Spalte) darf ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (oder einer *anderen* Spalte) *addiert* bzw. *substrahiert* werden.
3. Zwei Zeilen (oder Spalten) dürfen *vertauscht* werden, wenn gleichzeitig das Vorzeichen der Determinante *geändert* wird.

Regeln zur praktischen Berechnung einer n-reihigen Determinante

Praktische Berechnung einer n-reihigen Determinante ($n > 3$)

Die Berechnung einer *n-reihigen* Determinante ($n > 3$) erfolgt zweckmässigerweise nach dem folgenden Schema:

1. Mit Hilfe *elementarer Umformungen* werden zunächst die Elemente einer Zeile (oder Spalte) bis auf eines zu *Null* gemacht.
2. Dann wird die n-reihige Determinante nach den Elementen dieser Zeile oder Spalte *entwickelt*. Man erhält genau *eine* $(n-1)$-reihige Unterdeterminante.
3. Das unter 1. und 2. beschriebene Verfahren wird nun auf die $(n-1)$-reihige Unterdeterminante angewandt und führt zu einer einzigen $(n-2)$-reihigen Unterdeterminante (*wiederholte Reduzierung*).