

Lösungsvorschläge zur Serie 6

Aufgabe 1

- Diese Funktion ist nicht auf ganz \mathbb{R}^2 definiert, da für den Definitionsbereich gelten muss: $y \neq 0$ und $x + \ln(y^2) \geq 0$.
- Diese Funktion ist nicht auf ganz \mathbb{R}^2 definiert, da Nenner für $y = -x$ verschwindet. Die Funktion ist somit z.B. im Punkt $(1, -1)$ nicht definiert.
- Diese Funktion ist nicht auf ganz \mathbb{R}^2 definiert, da der Tangens an den Stellen $\dots -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$ nicht definiert ist. Die Funktion f ist somit z.B. im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ nicht definiert.
- Diese Funktion ist auf ganz \mathbb{R}^2 definiert, da $x^2 + 2y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ nie negativ wird und die Wurzel somit immer definiert ist.

Aufgabe 2

- Falsch. Die Funktion f ist definiert sobald $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ gilt, während g für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ definiert ist.
- Falsch. Damit f definiert ist, muss $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$ sein, also $x^2 + y^2 \leq 1$. Für g brauchen wir $x + y \leq 1$. Somit ist z.B. g im Punkt $(2, -2)$ definiert, f aber nicht.
- Falsch. Damit $f(x, y) = \ln(xy)$ definiert ist, brauchen wir $xy > 0$. Es sind also auch Punkte (x, y) mit $x < 0$ und $y < 0$ erlaubt. Zum Beispiel $(-1, -1)$ im Definitionsbereich von f , obwohl nicht in der angegebenen Menge enthalten.
- Falsch. Zum Beispiel ist im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ der Funktionswert $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 1 + 1 = 2 \notin [-1, 1]$. Der korrekte Wertebereich von f wäre $[-2, 2]$.

Aufgabe 3

- Auf der xz -Ebene gilt $y = 0$.
Damit erhalten wir $\varphi(x) = z = f(x, 0) = e^{-2x^2}$.

b) Die Höhenlinie von f zur Höhe c ist die Menge der Punkte (x, y) in der xy -Ebene mit Funktionswert $f(x, y) = c$. Sei also c im Wertebereich von f . Dann ist $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = c$ genau dann, wenn $cx^2 - x + cy^2 = 0$.

Ist $c = 0$, so wird diese Gleichung von allen (x, y) mit $x = 0$ erfüllt. Die Höhenlinie von f zur Höhe $c = 0$ ist somit die vertikale Gerade $x = 0$ in der xy -Ebene (siehe Abbildung).

Ist $c \neq 0$ können wir auf beiden Seiten der Gleichung durch c dividieren und erhalten $x^2 - \frac{x}{c} + y^2 = 0$. Diese Gleichung können wir zu einer Kreisgleichung

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 = \left(\frac{1}{2|c|}\right)^2$$

umschreiben. Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$ und Radius $\frac{1}{2|c|}$. Die Höhenlinie von f zur Höhe $c \neq 0$ ist somit der Kreis in der xy -Ebene mit Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$ und Radius $\frac{1}{2|c|}$ (siehe Abbildung).

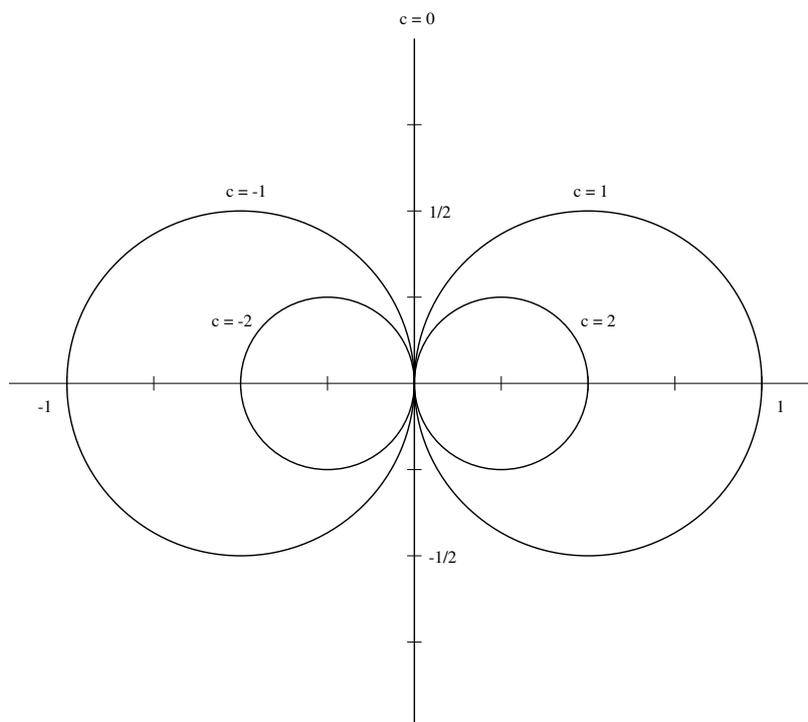


Abbildung 1: Die Niveaulinien $\frac{x}{x^2 + y^2} = c$ für $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 2xe^{y^2+xy} + x^2ye^{y^2+xy} = (xy + 2)xe^{y^2+xy} \\f_y(x, y) &= x^2(2y + x)e^{y^2+xy}\end{aligned}$$

b) Ähnlich wie bei der logarithmischen Ableitung (siehe Kapitel 3 Mathematik I) schreiben wir

$$g(x, y) = e^{\ln(g(x, y))} = e^{(y+2)\ln(x)}$$

und können jetzt ganz normal die partiellen Ableitungen bilden

$$\begin{aligned}g_x(x, y) &= \frac{y+2}{x}e^{(y+2)\ln(x)} = \frac{y+2}{x}x^{y+2} = (y+2)x^{y+1} \\g_y(x, y) &= e^{(y+2)\ln(x)} \ln(x) = x^{y+2} \ln(x)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}h_x(x, y) &= 2y^2 \sin(xy) \cos(xy) \\h_y(x, y) &= \sin^2(xy) + 2xy \sin(xy) \cos(xy)\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}k_x(x, y) &= \frac{(2x \cos(xy) - x^2y \sin(xy))(x^2 + y^2) - 2x^3 \cos(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \\&= \frac{2xy^2 \cos(xy) - x^2y(x^2 + y^2) \sin(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \\&= \frac{xy(2y \cos(xy) - x(x^2 + y^2) \sin(xy))}{(x^2 + y^2)^2} \\k_y(x, y) &= \frac{-x^3 \sin(xy)(x^2 + y^2) - 2x^2y \cos(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \\&= -\frac{x^2(x \sin(xy)(x^2 + y^2) + 2y \cos(xy))}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$f_x(x, y) = -4xe^{-(2x^2+3y^2)} \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = -6ye^{-(2x^2+3y^2)}.$$

Somit folgen für die gesuchten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= 4e^{-(2x^2+3y^2)}(4x^2 - 1) \\f_{yy}(x, y) &= 6e^{-(2x^2+3y^2)}(6y^2 - 1) \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 24xye^{-(2x^2+3y^2)}.\end{aligned}$$