Mathematik II (BIOL, HEST, PHAR) FS 2019
Prof. W. Farkas
Vincenzo Ignazio(Koordinator)

Musterlösung Probetest

---

1. (*12 Punkte*)

a) (*4 Punkte*)

- Falsch. Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

hat keine Lösung.

- Die Matrix mit den drei gegebenen Vektoren als Spalten hat Determinante $\det = 15-3c$. Damit die drei Vektoren linear abhängig sind, muss also $c=5$ sein.
- Falsch. Wähle zum Beispiel die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

mit jeweils Determinante 0. Es gilt aber $\det(A+B)=\det(E)=1$.

- Richtig. Eine invertierbare Matrix hat Determinante $\det \neq 0$. Da die Determinante das Produkt der Eigenwerte der Matrix ist, kann somit keiner der Eigenwerte Null sein.

b) (*2 Punkte*) Ein homogenes quadratisches Gleichungssystem $Bx=0$ besitzt genau dann nur die triviale Lösung $x=0$, wenn $\det(B)\neq 0$ gilt. Hier haben wir (z.B. mit der Sarrus-Regel)

$$\det(B)=4(\mu+1)-2\mu=2\mu+4.$$

Es muss also $\mu \neq -2$ gelten.

c) (*2 Punkte*) Das Gaussverfahren liefert

$$(A|b)=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -2\end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+\frac{1}{2}Z_1]{Z_2-\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)=(A^*|b^*).$$

Daraus folgt von unten nach oben gelöst $x_3=-1$, $x_2=2$ und $x_1=1$. Die Lösung ist also

$$x=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

d) (*4 Punkte*) Das charakteristische Polynom von C ist

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ -1 & -\lambda & 2\\ 1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} &= \lambda^2(1-\lambda)+4-2+2\lambda-2(1-\lambda)-2\lambda\\ &= -\lambda^3+\lambda^2+2\lambda\\ &= \lambda(-\lambda^2+\lambda+2).\end{aligned}$$

Die Nullstellen davon sind $\lambda = 0$ sowie $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$. Also sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -1.$$

Der grösste Eigenwert von C ist somit $\lambda_2 = 2$. Zu diesem finden wir einen Eigenvektor durch Lösen von $(C - \lambda_2 E)x = (C - 2E)x = 0$, also

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+Z_1]{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+\frac{3}{4}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

mit Lösung $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = 0$ und $x_1 = 2t$. Eigenvektoren von C zum Eigenwert 2 haben somit die Form

$$x = \begin{pmatrix}2t\\ 0\\ t\end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \neq 0.$$

Ein Eigenvektor wäre bsp. $\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

2. (*13 Punkte*)

a) (*3 Punkte*) Die gegebene Fläche kann auch als Graph der Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \ln(6)$$

gesehen werden. Der Wert z_0 ist $z_0 = f(1, 2) = \ln(6) - \ln(6) = 0$. Die Gleichung der Tangentialebene ist diejenige and die Funktion f im Punkt $P = (1, 2, 0) = (x_0, y_0, z_0)$. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2+1}\\ f_y(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2+1}.\end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung ist

$$\begin{aligned}z &= z_0 + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x,y)\cdot(y-y_0)\\ &= \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2) = \frac{1}{3}(x+2y-5).\end{aligned}$$

b) (*4 Punkte*) Die kritischen Punkte bestimmen wir durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x + 6y = 0\\ f_y(x,y) = 6x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{27}{2} = 0\end{cases}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -y$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen können. Wir erhalten

$$\frac{1}{2}y^2 - 6y + \frac{27}{2} = 0 \iff y^2 - 12y + 27 = 0.$$

Die Lösungen davon sind $y_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = 6 \pm 3$. Mit der Gleichung $x = -y$ folgen also die kritischen Punte

$$P_1 = (-9, 9) \qquad \text{und} \qquad P_2 = (-3, 3).$$

Für den zweiten Teil brauchen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, welche sind

$$f_{xx}(x, y) = 6 \qquad f_{yy}(x, y) = y \qquad f_{xy} = 6.$$

Es ist somit $\Delta = 6y - 36$. Für P_1 ist $\Delta > 0$ und $f_{xx}(-9, 9) = 6 > 0$, also ist bei $P_1 = (-9, 9)$ ein relatives Minimum. Für P_2 ist $\Delta < 0$, also ist bei $P_2 = (-3, 3)$ ein Sattelpunkt.

c) (*3 Punkte*) Der Punkt $(x_0, y_0) = (-2, y_0)$ liegt auf der Kurve, muss also die Bedingung $g(-2, y_0) = 0$ erfüllen. Es ist $g(-2, y_0) = -y_0^2 - 4y_0 = -y_0(4 + y_0)$. Für $g(-2, y_0) = 0$ kommt also nur $y_0 = 0$ oder $y_0 = -4$ in Frage. Da $y_0 < 0$ sein soll, können wir ersteres vergessen. Wir müssen also die Steigung im Punkt $(-2, -4)$ ausrechnen. Das gelingt mit impliziter Differentiation. Die partiellen Ableitungen sind

$$g_x(x, y) = 6x^2 - 8 \qquad g_y(x, y) = -2y - 4.$$

Es folgt für die Steigung

$$y'(-2) = -\frac{f_x(-2, -4)}{f_y - 2, -4} = -\frac{16}{4} = -4.$$

d) (*3 Punkte*) Die Gleichung, welche die Kurve beschreibt, können wir auch umschreiben in $f(x, y) = 0$, wobei f die Funktion $f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 4 + 4y^2$ ist. Die Kurve besitzt horizontale Tangenten in genau den Punkten, wo die Steigung gleich Null ist. Mit impliziter Differentiation folgt für die Steigung in einem beliebigen Punkt (x, y) auf der Kurve

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y x, y} = -\frac{3x^2 - 6x}{8y} = \frac{3x(2 - x)}{8y}.$$

Die Steigung ist also Null falls der Punkt auf der Kurve x-Wert 0 oder 2 besitzt. Die dazu passenden y-Werte finden wir durch einsetzen in die Gleichung, welche die Kurve beschreibt. Ist $x = 0$ so folgt $y = 1$ oder $y = -1$. Ist $x = 2$, so folgt $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$. Die Kurve besitzt also in den vier Punkten

$$P_1 = (0, 1) \qquad P_2 = (0, -1) \qquad P_3 = (2, \sqrt{2}) \qquad P_4 = (2, -\sqrt{2})$$

horizontale Tangenten.