Mathematik II (BIOL, HEST, PHAR) FS 2019
Prof. W. Farkas
Koordinator: Vincenzo Ignazio

Lösungsvorschläge zur Serie 9

Aufgabe 1

a) D ist ein Rechteck (siehe Abbildung 1) mit Flächeninhalt $\frac{\pi^2}{4}$.

Für das 1. Integral erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\iint_D \cos x \cos y \, dydx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos y \, dydx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy \, dx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \sin y \Big|_0^{\pi/2} dx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx \\
&= \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -1.
\end{aligned}
$$

Für das zweite Integral über D erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sin(x+y) \, dydx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \, dydx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \, dy \, dx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} dx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos(x+\pi/2) + \cos(x)) \, dx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin(x) + \cos(x)) \, dx \\
&= -\cos(x) + \sin(x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

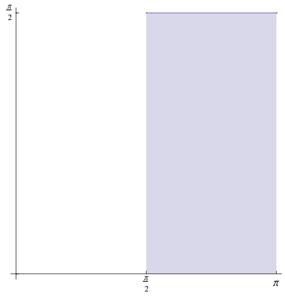


Abbildung 1: Gebiet D

b) Der Flächeninhalt von E (siehe Abbildung 2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\iint_E 1dA &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} 1dydx\\ &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) dx\\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^4 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Für das Integral über E erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_E (xy+y)dydx &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} (xy+y)dydx\\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}y^2x + \frac{1}{2}y^2\Big|_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}}\right)dx\\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2\right)dx\\ &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{24}x^3\Big|_0^4 = 4.\end{aligned}$$

c) Der Flächeninhalt von F (siehe Abbildung 2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\iint_F 1dydx &= \int_0^{e^2-1} \int_{\ln(1+x)}^{2} 1dydx\\ &= \int_0^{e^2-1} (2 - \ln(1+x))dx\\ &= 2x - ((1+x)\ln(1+x) - x)\Big|_0^{e^2-1}\\ &= e^2 - 3.\end{aligned}$$

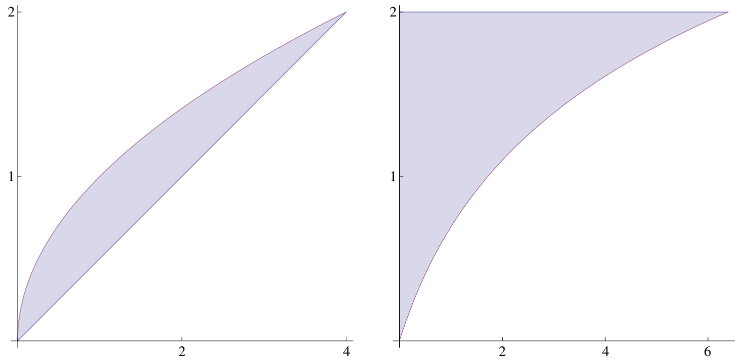


Abbildung 2: Gebiete E und F

Aufgabe 2

a) Es ist $D = \{(x,y) |\ x, y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Transformation in Polarkoordinaten mit $x = r\cos(\phi)$ und $y = r\sin(\phi)$ liefert

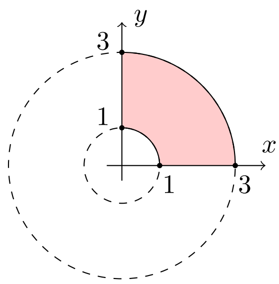
$$\begin{aligned} x, y \geq 0 &\iff r\cos(\phi), r\sin(\phi) \geq 0 \iff \cos(\phi), \sin(\phi) \geq 0 \\ &\iff \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{(uns interessieren } \phi \in [0, 2\pi)) \end{aligned}$$

und

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \iff 1 \leq r^2\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\phi) \leq 9 \iff 1 \leq r^2 \leq 9$$

wegen $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$. Somit ist

$$D = \left\{(r, \phi) \,\middle|\, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 1 \leq r \leq 3\right\}.$$



Mit der Formel für die Fläche eines Gebietes in Polarkoordinaten folgt

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r\,dr d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 r\,dr d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_1^3 d\phi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = 4\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

Natürlich können wir die Fläche von D auch direkt mit πr^2 für die Fläche eines Kreises angeben und zwar $\frac{1}{4}(9\pi - \pi) = 2\pi$. Wir sehen, dass die Resultate in der Tat übereinstimmen.

b) Mit Polarkoordinaten lässt sich das Gebiet B direkt beschreiben. Es ist

$$B = \left\{(r, \phi)|\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \text{ und } 0 \leq r \leq 2\right\}.$$

Nun können wir das Gebietsintegral mit der Formel für Gebietsintegrale über Gebiete in Polarkoordinaten berechnen

$$\begin{aligned}
\iint_B f(x,y)\,dA = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\, dr\, d\phi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\, dr\, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r^2 \cos\phi \sin\phi \ r\, dr\, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\phi \sin\phi \int_0^2 r^3\, dr\, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos\phi\sin\phi\, d\phi \\
&= 4\big(-\frac{1}{4}\cos(2\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\big) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) Die Flächeninhalt von K (siehe Abbildung 3) ist mit der Formel für Gebiete in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r\, dr d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\phi)} r\, dr\, d\phi &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2\Big|_0^{1+\cos(\phi)}\right) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big(1 + 2\cos(\phi) + \cos^2(\phi)\Big)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2} + 2\cos(\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\phi)\Big)\, d\phi \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{3\pi}{2} + 2\sin(\phi) + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\Big|_0^{2\pi}\Big) \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

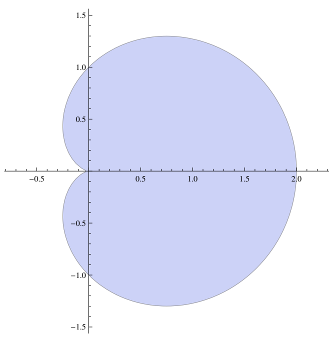


Abbildung 3: Gebiet K

d) Wir rechnen in Polarkoordinaten $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Es gilt

$$\begin{aligned}
x, y \geq 0 &\iff r\cos(\varphi), r\sin(\varphi) \geq 0 \\
&\iff \cos(\varphi), \sin(\varphi) \geq 0 \\
&\iff \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{(uns interessieren } \varphi \in [0, 2\pi))
\end{aligned}$$

und

$$x^2 + y^2 \leq 4 \iff r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) \leq 4 \iff \quad r^2 \leq 4 \iff \quad r \leq 2.$$

In Polarkoordinaten ist also

$$A = \left\{(r, \phi) |\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq r \leq 2\right\}.$$

Das gesuchte Integral ist somit

$$\iint_A f\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4 - r^2}\ \ r\, dr\, d\varphi.$$

Die Stammfunktion von $r\sqrt{4 - r^2}$ können wir mit der Substitution

$$u = \sqrt{4 - r^2} \quad \text{mit} \quad u\, du = -r\, dr$$

finden und zwar

$$\int r\sqrt{4 - r^2} dr = \int ru\Big(-\frac{u}{r}\Big) du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{(4 - r^2)^{3/2}}{3} + C.$$

Das Integral ist somit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4 - r^2}\ \ r\, dr\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\frac{(4 - r^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^2\Big)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\,\varphi = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}.$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-1}^{4} \int\limits_{z=0}^{\pi} x^2 y \cos(yz) dz dy dx &= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-1}^{4} x^2 y \left(\frac{1}{y} \sin(yz)\Big|_{z=0}^{\pi}\right) dy dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-1}^{4} x^2 \sin(y\pi) dy dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} x^2 \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi y)\Big|_{y=-1}^{4}\right) dx \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} x^2 \left(-\frac{2}{\pi}\right) dx = -\frac{2}{3\pi}.
\end{aligned}$$

b)

$$\int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{1}\int_{z=y}^{y^2} yz\sin(x)dzdydx = \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{1} y\sin(x)\left(\frac{1}{2}z^2\Big|_y^{y^2}\right)dydx$$
$$= \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{1} y\sin(x)\frac{1}{2}\left(y^4-y^2\right)dydx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{\pi/2}\sin(x)\left(\frac{1}{6}y^6-\frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_{y=0}^{1} dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{12}\int_{0}^{\pi/2}\sin(x)dx$$
$$= \frac{1}{24}\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{24}.$$

c) Wir berechnen das Volumen zunächst als Dreifachintegral.

Betrachten wir zuerst die Integrationsgrenzen.

Der Boden liegt in der xy-Ebene, wo $z=0$ ist. Das heisst für den z-Wert gilt $0\le z\le x^2y$. In der xy-Ebene wird der Boden von den Punkten $(0,0)$, $(-2,0)$ und $(0,2)$ aufgespannt. Für die Integrationsgrenzen heisst das, dass die x-Werte zwischen -2 und 0 liegen und für die y-Werte $0\le y\le x+2$ gilt. Das Volumenintegral ist also gegeben durch

$$V = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{x+2}\int_{0}^{x^2y} 1dzdydx = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{x+2} x^2ydydx$$
$$= \int_{-2}^{0} x^2\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{x+2}\right)dx$$
$$= \int_{-2}^{0}\frac{1}{2}x^2(x+2)^2dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x^4+4x^3+4x^2dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5+x^4+\frac{4}{3}x^3\Big|_{-2}^{0}\right) = \frac{8}{15}.$$

Das Volumen eines solchen zylindrischen Körpers kann man auch als Doppelintegral der Funktion $f(x,y)=x^2y$ auf dem Gebiet aufgespannt durch $(0,0)$, $(-2,0)$ und $(0,2)$ auffassen, es gilt also

$$V = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{x+2} x^2ydydx.$$

Dies entspricht gerade der obigen Formel im zweiten Schritt und wir erhalten dasselbe Resultat, indem wir wie oben verfahren.