Mathematik II (BIOL, HEST, PHAR) FS 2019
Prof. W. Farkas
Koordinator: Vincenzo Ignazio

# Lösungsvorschläge zur Serie 11

## Aufgabe 1

Das Gebiet wird durch die Geraden $y = \frac{1}{2}x$ und $y = -\frac{1}{2}x$ begrenzt. Somit ist $G$ geben durch

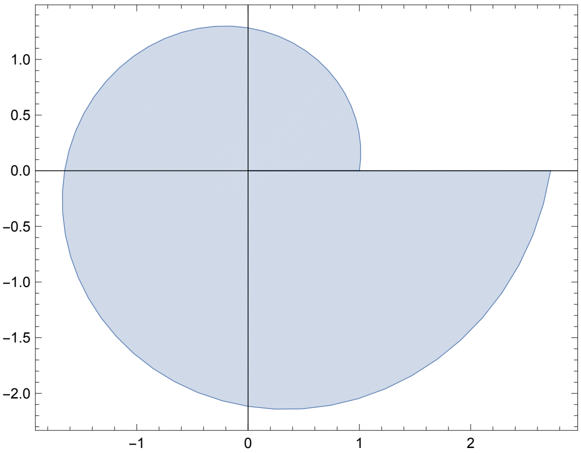
$$G = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2\,, -\frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{1}{2}x\right\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\iint_G f(x,y)\,dA &= \int_0^2 \int_{-x/2}^{x/2} (xy + x + y)\,dydx \\
&= \int_0^2 \left( \frac{xy^2}{2}\bigg|_{-x/2}^{x/2} + xy\bigg|_{-x/2}^{x/2} + \frac{1}{2}y^2\bigg|_{-x/2}^{x/2} \right) dx \\
&= \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\bigg|_0^2 \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Das Gebiet $B$ sieht wie folgt aus

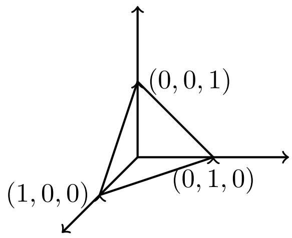


Die Fläche des Gebietes $B$ ist mit der Formel für Gebiete in Polarkoordinaten gleich

$$\begin{aligned}
\iint_B 1\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{r(\phi)} 1\cdot r\,drd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{e^{\phi/2\pi}} r\,drd\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{e^{\phi/2\pi}} d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{\phi/\pi}\,d\phi \\
&= \frac{1}{2}\pi e^{\phi/\pi}\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}(e^2-1).
\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

Zuerst überlegen wir uns, wie der eingeschlossene Körper aussieht. Am einfachsten ist es, sich zu überlegen, wo die Ebene $z = 1-x-y$ die drei Koordinatenachsen schneidet, d.h. welche Punkte der Form $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ und $(0,0,z)$ auf der Ebene $z = 1-x-y$ liegen. Wir finden durch Einsetzen die Schnittpunkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Der Körper $K$ sieht also wie folgt aus:




Somit kann $K$ durch

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1-x\,,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

beschrieben werden. Das Volumen ist also gleich

$$\begin{aligned}
\iiint_K 1\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dzdydx &= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx \\
= \int_0^1 ((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2)dx &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

a) Zuerst lösen wir die entsprechende homogene Differentialgleichung, d.h. $y'(x)-2y(x) = 0$. Deren Lösung findet man mit der Methode der Trennung der Variablen und findet (siehe Vorlesung)

$$y(x) = K \exp\left(\int 2\,dx\right) = Ke^{2x} \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{2x},$$

wobei wir die Funktion $K(x)$ noch bestimmen müssen. Diesen Ansatz setzen wir in die inhomogene Differentialgleichung ein und erhalten

$$1 = y'(x) - 2y(x) = (K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x}) - 2K(x)e^{2x} = K'(x)e^{2x},$$

das heisst $K'(x)e^{2x} = 1$. Daraus folgt

$$K(x) = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Setzt man dieses $K(x)$ in den gewählten Ansatz ein, so folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{2x} = Ce^{2x} - \frac{1}{2} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

b) Wir verfahren wie in Teilaufgabe a). Die homogene Differentialgleichung ist $y'(x) + y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int 1\,dx\right) = Ke^{-x} \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{-x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$x = y'(x) + y(x) = (K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x}) + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}.$$

Wir haben also $K'(x) = xe^x$ und somit

$$K(x) = \int xe^x\,dx \overset{(*)}{=} xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante,}$$

wobei wir in $(*)$ partielle Integration gebraucht haben. Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{-x} = Ce^{-x} + x - 1 \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

c) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) - y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(\int 1\,dx\right) = Ke^x \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^x,$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$\sin(x) = y'(x) - y(x) = (K'(x)e^x + K(x)e^x) - K(x)e^x = K'(x)e^x.$$

Wir haben also $K'(x) = \sin(x)e^{-x}$ und somit

$$K(x) = \int \sin(x)e^{-x}\,dx.$$

Dieses Integral lösen wir mit zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^{-x}\,dx &= -\sin(x)e^{-x} + \int \cos(x)e^{-x}\,dx \\ &= -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} - \int \sin(x)e^{-x}\,dx,\end{aligned}$$

also

$$K(x) = \int \sin(x)e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x)+\cos(x))+C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^x = Ce^x - \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich die Konstante $C = \frac{3}{2}$. Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)).$$