Mathematik II (BIOL, HEST, PHAR) FS 2019
Prof. W. Farkas
Vincenzo Ignazio(Koordinato)

Lösungsvorschläge zur Serie 12

Aufgabe 1

a) Die homogene Differentialgleichung lautet umgeschrieben $y'(x) - y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int -1\,dx\right) = Ke^x \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^x,$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) = y(x) + x \qquad \Longleftrightarrow \qquad K'(x)e^x + K(x)e^x = K(x)e^x + x.$$

Wir haben also $K'(x) = xe^{-x}$ und somit

$$K(x) = \int xe^{-x}\,dx \overset{(*)}{=} -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante,}$$

wobei wir in $(*)$ partielle Integration gebraucht haben. Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^x = Ce^x - x - 1 \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

b) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) - y(x) = 0$ (wie in Teilaufgabe a)). Somit ist die Lösung davon wieder $y(x) = Ke^x$ mit K Konstante. Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^x,$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) - y(x) = xe^{-x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (K'(x)e^x + K(x)e^x) - K(x)e^x = xe^{-x}.$$

Wir haben also $K'(x) = xe^{-2x}$ und somit

$$K(x) = \int xe^{-2x}\,dx \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante,}$$

wobei wir in $(*)$ partielle Integration gebraucht haben. Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^x = Ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}\left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

c) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) + 2y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int 2\,dx\right) = Ke^{-2x} \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{-2x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) + 2y(x) = e^{3x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x}) + 2K(x)e^{-2x} = e^{3x}.$$

Wir haben also $K'(x) = e^{5x}$ und somit

$$K(x) = \int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{-2x} = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

d) Die homogene Differentialgleichung lautet umgeschrieben $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int \frac{1}{x}\,dx\right) = Ke^{-\ln(|x|)} = \frac{K}{|x|} = \frac{\tilde{K}}{x} \qquad \text{mit } \tilde{K} \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = \frac{K(x)}{x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) = x^2 + 4 - \frac{y(x)}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}\right) = x^2 + 4 - \frac{K(x)}{x^2}.$$

Wir haben also $K'(x) = x^3 + 4x$ und somit

$$K(x) = \int x^3 + 4x\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{C}{x} + \frac{1}{4}x^3 + 2x \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Mit der Bedingung $y(2) = 10$ ergibt sich die Konstante $C = 8$. Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{8}{x} + \frac{1}{4}x^3 + 2x.$$

Aufgabe 2

a) Die Veränderungsgeschwindigkeit des Bestandes ist $y'(t)$, da der Bestand $y(t)$ ist. Da die Veränderungsgeschwindigkeit $y'(t)$ proportional zum halben Kehrwert von $y(t)+1$ ist (mit Proportionalitätskonstante α), erhalten wir

$$y'(t) = \alpha \cdot \frac{1}{2(y(t)+1)}.$$

b) Eine Funktion $y(t)$, welche die gegebene Gleichung erfüllt, erfüllt auch die Gleichung, die wir erhalten, falls wir auf beiden Seiten ableiten. Leiten wir die gegebene Gleichung ab, erhalten wir

$$2y(t) \cdot y'(t) + 2y'(t) = \alpha \iff y'(t)(2y(t)+2) = \alpha \iff y'(t) = \alpha \cdot \frac{1}{2(y(t)+1)}.$$

Die Funktion $y(t)$ erfüllt somit auch die DGL aus Teilaufgabe a).

c) Die Funktion $y(t)$ die den Bestand beschreibt, muss $y(0) = 1$ und $y(3) = 3$ erfüllen und auch die Gleichung aus Teilaufgabe b). Betrachten wir diese Gleichung zum Zeitpunkt $t = 1$ und $t = 3$ folgt

$$\begin{aligned} y(0)^2 + 2y(0) &= 3 = C, \\ y(3)^2 + 2y(3) &= 15 = 3\alpha + C, \end{aligned}$$

also $C = 3$ und $\alpha = 4$. Die Funktion $y(t)$ erfüllt also $y(t)^2 + 2y(t) = 4t + 3$.

(i) Gefragt ist für welches t gilt, dass $y(t) = 9$. Setzen wir das in $y(t)^2 + 2y(t) = 4t+3$ ein folgt $81 + 18 = 4t + 3$. Daraus schliessen wir $t = 24$. Der Bestand ist also nach einem Tag 9.

(ii) Zwei Tage sind $t = 48$ Stunden. Gesucht ist also $y(48)$. Betrachten wir die Gleichung $y(t)^2 + 2y(t) = 4t+3$ für $t = 48$ folgt $y(48)^2 + 2y(48) = 195$. Diese Gleichung besitzt die zwei Lösungen

$$y(48) = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 195}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{196}}{2} = -1 \pm 14$$

von denen nur die positive für unsere Fragestellung sinnvoll ist. Der Bestand nach 48 Stunden ist also 13.

Aufgabe 3

a) Es handelt sich nicht um eine lineare Differentialgleichung. Somit kommt die Methode der Variation der konstanten nicht infrage. Wir brauchen also Trennung der Variablen, müssen dafür aber zuerst die DGL in die passende Form umschreiben. In diesem Fall ist die DGL umgeschrieben gleich $y'(x) = x(y^2(x)+1)$ und somit liefert das Verfahren

$$y'(x) = x(y^2(x)+1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x(y^2+1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y^2+1}\,dy = x\,dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{y^2+1}\,dy = x\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int x\,dx \quad \Longrightarrow \quad \arctan(y) = \frac{x^2}{2}+C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach y liefert

$$\arctan(y) = \frac{x^2}{2} + C \quad \Longrightarrow \quad y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = xy^2(x) + x$ ist also $y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Dividieren wir die DGL auf beiden Seiten durch x erhalten wir

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + 2,$$

also eine DGL 1. Ordnung des Typs $y' = f(\frac{y}{x})$. Diese lösen wir mittels Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Das heisst, $y(x) = xu(x)$ und $y'(x) = u(x) + xu'(x)$. Setzen wir das in die obige DGL ein, erhalten wir

$$u(x) + xu'(x) = u(x) + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad u'(x) = \frac{2}{x}.$$

Daraus folgt direkt für die Funktion u, dass

$$u(x) = 2\ln(|x|) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Rücksubstitution liefert

$$y(x) = xu(x) = 2x\ln(|x|) + Cx \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

c) Es handelt sich hier um eine DGL 1. Ordnung vom Typ $y' = f(ax+by+c)$. Diese lösen wir mittels Substitution $u(x) = x - y(x) + 1$. Das heisst, $y(x) = x+1-u(x)$ und $y'(x) = 1 - u'(x)$. Setzen wir das in die DGL ein, erhalten wir die DGL $1 - u'(x) = u(x)^2$. Wir wenden dafür die Methode der Trennung der Variablen an

$$1-u'(x) = u(x)^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1-u^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-u^2}\,du = 1\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{1-u^2}\,du = \int 1\,dx.$$

Das rechte Integral ist gleich $x + C$. Das linke Integral rechnen wir mit Partialbruchzerlegung aus. Es gilt

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} \overset{!}{=} \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+B(1-u)}{(1-u)(1+u)} \quad \Longrightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}.$$

Somit ist

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,du = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du = \frac{1}{2}\big(-\ln(|1-u|)+\ln(|1+u|)\big) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right).$$

Wir haben also hergeleitet

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right) = x + C,$$

was wir nach u auflösen müssen. Es folgt

$$\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = e^{2x+2C} = e^{2C}e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+u}{1-u} = \underbrace{\pm e^{2C}}_{\tilde{C}}\, e^{2x} = \tilde{C}e^{2x}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + u = \tilde{C}e^{2x}(1-u) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{\tilde{C}e^{2x}-1}{1+\tilde{C}e^{2x}}.$$

Rücksubstitution liefert

$$y(x) = x + 1 - u(x) = x + 1 - \frac{\tilde{C}e^{2x}-1}{1+\tilde{C}e^{2x}} \quad \text{mit } \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4

a) Um eine homogene lineare DGL 2. Ordnung $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ mit konstanten Koeffizienten zu lösen, betrachten wir zunächst die dazugehörige charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. In unserem Fall ist das die Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $\lambda_{1/2} = -1$, die charakteristische Gleichung besitzt also eine doppelte reelle Nullstelle. Somit ist die allgemeine Lösung der DGL $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$ gegeben durch

$$y(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} = (C_1 + C_2x)e^{-x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems finden wir durch Einsetzen der Bedingungen

$$y(0) = C_1 \overset{!}{=} 1$$
$$y'(0) = -C_1 + C_2 \overset{!}{=} 1 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 2$$

Die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = (1 + 2x)e^{-x}.$$

b) Wir gehen wie in Teilaufgabe a) vor. Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ mit Lösungen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Die charakteristische Gleichung besitzt also zwei verschiedene reelle Nullstellen. Somit ist die allgemeine Lösung der DGL $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ gegeben durch

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$