Mathematik II (BIOL, HEST, PHAR) FS 2019
Prof. W. Farkas
Vincenzo Ignazio(Koordinator)

Lösungsvorschläge zur Serie 14

Aufgabe 1

Es handelt sich um ein Linienintegral eines Vektorfeldes **in der Ebene** entlang einer **geschlossenen** Kurve. Wenn wir die Komponenten von $\overrightarrow{F}$ durch

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

beschreiben, dann besagt die Formel von Gauss-Green, dass

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA,$$

wobei A die durch die Kurve C eingeschlossene Gebiet ist. Auf der rechten Seite steht ein normales Doppelintegral. In unserem Fall ist

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = 2x - 1$$

und A ist die durch γ_1, γ_2 und γ_3 begrenzte Fläche, die man schreiben kann als

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2\,,\, x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 2x - 1 \, dy dx \\
&= \int_0^2 \left(2xy - y \,\Big|_{x^2}^4 \right) dx = \int_0^2 8x - 4 - 2x^3 + x^2 \, dx \\
&= 4x^2 - 4x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \,\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Wir haben berechnet

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{8}{3},$$

was mit dem direkt berechneten Resultat in Aufgabe 2 Serie 13 übereinstimmt.

Aufgabe 2

a) Eine mögliche Parametrisierung der Kurve ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5+t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 10.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} -5+t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{10} 0\,dt = 0.$$

b) Es gilt $\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = -1 - 1 = -2$ und somit ist das Doppelintegral

$$\iint_A -2\,dxdy = -2 \cdot \text{Fläche von } A = -2 \cdot \frac{25\pi}{2} = -25\pi.$$

c) Wenn wir die Kurven C und C' aus Teilaufgabe a) und b) zusammenfügen, erhalten wir eine geschlossene Kurve $\tilde{C}$ welche die Halbkreisfläche A aus Teilaufgabe b) begrenzt. Mit der Formel von Gauss-Green gilt somit

$$\oint_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot d\dot{\vec{r}} = \underbrace{\iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA}_{=-25\pi \text{ aus b)}}.$$

Da die Kurve $\tilde{C}$ aus C und C' zusammengesetzt ist, gilt für die linke Seite

$$\oint_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot d\dot{\vec{r}} = \underbrace{\int_C \vec{F} \cdot d\dot{\vec{r}}}_{=0 \text{ aus b)}} + \int_{\tilde{C}'} \vec{F} \cdot d\dot{\vec{r}}.$$

Somit schliessen wir direkt

$$\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -25\pi.$$

Alternativ: Das Kurvenintegral können wir auch direkt ausrechnen. Eine mögliche Parametrisierung der Kurve C' ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Somit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 5\sin(t) \\ -5\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -5\sin(t) \\ 5\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -25.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -25\,dt = -25\pi.$$

Aufgabe 3

a) Zuerst rechnen wir das Linienintegral direkt aus. Wir teilen dafür die Kurve C in drei Abschnitte $C = C_1 + C_2 + C_3$ und parametrisieren die Teilkurven einzeln

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 1 \\
C_2 &: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 1 \\
C_3 &: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 1.
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
C_1 :\quad & \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \\
C_2 :\quad & \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 1 \\
C_3 :\quad & \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} (1-t)^{\frac{5}{3}} \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}(1-t)^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{5}{3}(1-t)^{\frac{5}{3}}.
\end{aligned}
$$

Die einzelnen Linienintegrale sind somit

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 0\, dt = 0 \\
\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 1\, dt = 1 \\
\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 -\frac{5}{3}(1-t)^{\frac{5}{3}}\, dt = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{8}(1-t)^{\frac{8}{3}} \Big|_0^1 = -\frac{5}{8}.
\end{aligned}
$$

Das gesuchte Linienintegral ist also

$$
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.
$$

Jetzt rechnen wir das Linienintegral mit der Formel von Gauss-Green aus. Mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ folgt

$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA = \int_0^1 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} (2x - x)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{5}{3}}\, dx = \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

b) Zuerst rechnen wir das Linienintegral direkt aus. Wir teilen dafür die Kurve C in zwei Abschnitte $C = C_1 + C_2$ und parametrisieren die Teilkurven einzeln

$$C_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2+t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le t \le 4$$
$$C_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 4-t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } -2 \le t \le 2.$$

Somit gilt

$$C_1 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} (-2+t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = (-2+t)^2$$
$$C_2 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2t \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -4.$$

Die einzelnen Linienintegrale sind somit

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 (-2+t^2)\, dt = \int_0^4 4 - 4t + t^2\, dt = \frac{16}{3}$$
$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^2 -4\, dt = -16.$$

Das gesuchte Linienintegral ist also

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{16}{3} - 16 = -\frac{32}{3}.$$

Jetzt rechnen wir das Linienintegral mit der Formel von Gauss-Green aus. Mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ folgt

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} -1\, dy\, dx$$
$$= \int_{-2}^2 x^2 - 4\, dx = -\frac{32}{3}.$$

c) Zuerst rechnen wir das Linienintegral direkt aus. Wir teilen dafür die Kurve C in drei Abschnitte $C = C_1 + C_2 + C_3$ und parametrisieren die Teilkurven einzeln

$$C_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le t \le 1$$
$$C_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le t \le 2$$
$$C_3 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-2t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le t \le 1.$$

Somit gilt

$$C_1 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$
$$C_2 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = t^3$$
$$C_3 : \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2(1-t)^2 \\ 8(1-t)^5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -2(1-t)^2 - 16(1-t)^5.$$

Die einzelnen Linienintegrale sind somit

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 0\, dt = 0$$

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^2 t^3\, dt = 4$$

$$\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 -2(1-t)^2 - 16(1-t)^5\, dt = \frac{2}{3}(1-t)^3 + \frac{8}{3}(1-t)^6 \bigg|_0^1 = -\frac{10}{3}.$$

Das gesuchte Linienintegral ist also

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0 + 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}.$$

Jetzt rechnen wir das Linienintegral mit der Formel von Gauss-Green aus. Mit $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned}\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \right) dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (2xy^3 - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}xy^4 - xy \bigg|_0^{2x} dx = \int_0^1 8x^5 - 2x^2\, dx = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Die Parametrisierung ist schon gegeben

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le t \le 2\pi.$$

Somit gilt eingesetzt in das Vektorfeld

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ -\frac{\sin(t)}{\cos(t)^2+\sin(t)^2} \\ \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2+\sin(t)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\dot{\overrightarrow{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

b) Sei C_1 der erste Abschnitt, also die Kurve von $(1, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$. Eine mögliche Parametrisierung dieser Kurve ist

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\overrightarrow{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = -t.$$

Das Kurvenintegral entlang C_1 ist also

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 t \, dt = -\frac{1}{2}.$$

Sei C_2 der zweite Abschnitt, also die Kurve von $(0, 1, 0)$ nach $(0, 0, 1)$. Eine mögliche Parametrisierung dieser Kurve ist

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\overrightarrow{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = 0.$$

Das Kurvenintegral entlang C_2 ist also

$$\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Sei C_3 der dritte Abschnitt, also die Kurve von $(0, 0, 1)$ zurück nach $(1, 0, 0)$. Eine mögliche Parametrisierung dieser Kurve ist

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Somit gilt

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ t(1-t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\overrightarrow{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = -t^2.$$

Das Kurvenintegral entlang C_3 ist also

$$\int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 -t^2 \, dt = -\frac{1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir für das gesuchte Integral

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.$$

c) Eine mögliche Parametrisierung der Kurve ist

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} -5+10t \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le t \le 1.$$

Somit gilt

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-10t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\overrightarrow{r}}(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = -20.$$

Das Kurvenintegral ist also

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 20\, dt = 20.$$

Aufgabe 5

a) Wir nennen die 5 Teilflächen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

i) Sei A_1 der Boden $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(2,2,0)$,$(0,2,0)$. Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le u \le 2 \text{ und } 0 \le v \le 2.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $t_u \times t_v$ steht zwar senkrecht auf dem Boden A_1, zeigt aber in den Körper V hinein. Somit rechnen wir mit $-t_u \times t_v$ weiter. Wir finden

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{F} \cdot (-t_u \times t_v) = 0.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \int_0^2 \int_0^2 0\, dudv = 0.$$

ii) Sei A_2 das vordere Dreieck $(2,0,0)$, $(2,2,0)$, $(2,2,1)$. Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2 \\ u \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le u \le 2 \text{ und } 0 \le v \le \frac{u}{2}.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $t_u \times t_v$ steht senkrecht auf A_2 und zeigt auch nach aussen. Wir finden

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) = \begin{pmatrix} 2 \\ u \\ 2v \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot (t_u \times t_v) = 2.$$

Daraus folgt

$$\iint\limits_{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^{\frac{u}{2}} 2\, dv du = 2.$$

iii) Sei A_3 das hintere Dreieck $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,2,1)$. Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq u \leq 2 \text{ und } 0 \leq v \leq \frac{u}{2}.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $t_u \times t_v$ steht senkrecht auf dem Dreieck A_3, zeigt aber in den Körper V hinein. Somit rechnen wir mit $-t_u \times t_v$ weiter. Wir finden

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 2v \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \cdot (-t_u \times t_v) = 0.$$

Daraus folgt

$$\iint\limits_{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^{\frac{u}{2}} 0\, dv du = 0.$$

iv) Sei A_4 die senkrechte Seitenfläche $(0,2,0)$, $(2,2,0)$, $(2,2,1)$,$(0,2,1)$. Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ 2 \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \leq u \leq 2 \text{ und } 0 \leq v \leq 1.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $t_u \times t_v$ steht senkrecht auf der Fläche A_4, zeigt aber in den Körper V hinein. Somit rechnen wir mit $-t_u \times t_v$ weiter. Wir finden

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) = \begin{pmatrix} u \\ 2 \\ 2v \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{F} \cdot (-t_u \times t_v) = 2.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_4} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \int_0^2 \int_0^1 2\, dvdu = 4.$$

v) Sei A_5 die schräge Deckfläche $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(2,2,1)$,$(0,2,1)$. Eine Parametrisierung dieser Fläche ist

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{v}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le u \le 2 \text{ und } 0 \le v \le 2.$$

Es gilt

$$t_u = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_v = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad t_u \times t_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $t_u \times t_v$ steht senkrecht auf der Fläche A_5 und zeigt auch effektiv vom Körper V nach aussen. Wir finden

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{F} \cdot (t_u \times t_v) = \frac{v}{2}.$$

Daraus folgt

$$\iint_{A_5} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \int_0^2 \int_0^2 \frac{v}{2}\, dvdu = 2.$$

Insgesamt finden wir

$$\oiint_{A} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = 0 + 2 + 0 + 4 + 2 = 8.$$

b) Die Divergenz von $\overrightarrow{F}$ ist in unserem Fall

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Wir müssen für das Dreifachintegral also die Funktion 4 über dem Volumen V integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\, dV &= 4 \iiint_V dV \\ &= 4 \cdot \text{Volumen des Körpers} \\ &= 4 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 8. \end{aligned}$$

Das Resultat stimmt in der Tat mit dem Resultat in a) überein.

Aufgabe 6

Es handelt sich um ein Oberflächenintegral eines Vektorfeldes (im Raum) über einer **geschlossenen** Fläche von innen nach aussen orientiert. Es kann somit der Satz von Gauss verwendet werden. In unserem Fall ist die Divergenz

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = 1 + 1 - 2z = 2 - 2z.$$

Der Körper K lässt sich am einfachsten durch Zylinderkoordinaten beschreiben

$$\{(r, \phi, z) \,|\, 0 \leq \phi \leq 2\pi\,,\ 0 \leq z \leq 4\,,\ 0 \leq r \leq \sqrt{z}\}.$$

Wir erhalten (beachten, dass in Zylinderkoordinaten aus dV ein $r\,dr\,d\phi\,dz$ wird !!)

$$\begin{aligned}
\oiint_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint_V \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{\sqrt{z}} (2-2z)\,r\,dr\,dz\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 (2-2z)\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{z}}\,dz\,d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (1-z)z\,dz\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\Big|_0^4\,d\phi = -\frac{40}{3}\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= -\frac{80}{3}\pi,
\end{aligned}$$

was mit dem direkt berechneten Resultat in Aufgabe 4 Serie 13 übereinstimmt.

Aufgabe 7

Die Fläche A (Kegel) ist geschlossen. Wir können also den Satz von Gauss anwenden. In diesem Fall ist die Divergenz

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = 2 + 3 + 1 = 6.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\oiint_A \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} &= \iiint_V \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\,dV \\
&= 6\iiint_V dV = 6 \cdot \text{Volumen des Kegels} \\
&= 6 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3 = 54\pi
\end{aligned}$$