Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik II
Frühlingssemester 2019
Kapitel 12: Linienintegrale und Oberflächenintegrale

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

12. Linienintegrale und Oberflächenintegrale

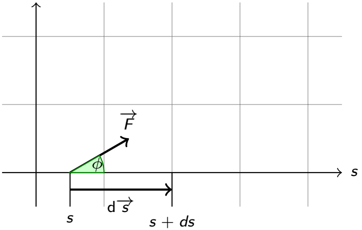
- Ein einführendes Beispiel
- Linien- oder Kurvenintegral
- Oberflächenintegrale
  - Oberflächenintegrale: Ein einführendes Beispiel
  - Definition eines Oberflächenintegrals
  - Berechnung eines Oberflächenintegrals
  - Oberflächenintegral in Flächenparametern

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 143 – 202**,
  Seiten 242 – 248 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Ein einführendes Beispiel

Wir führen den Begriff eines *Linien-* oder *Kurvenintegrals* in anschaulicher Weise am Beispiel der *physikalischen Arbeit* ein, die von einer *Kraft* bzw. *Kraftfeld* beim verschieben eines Massenpunktes verrichtet wird.

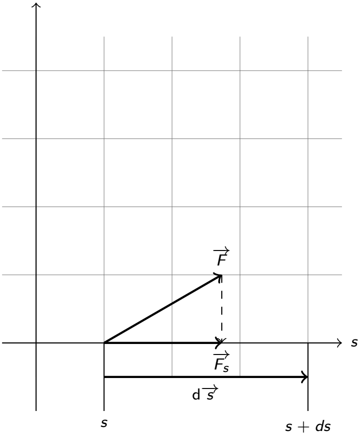


Verschiebung längs einer Geraden durch eine konstante Kraft

Der Massenpunkt wird durch eine *konstante* Kraft $\vec{F}$ längs einer *Geraden* um den Vektor $\vec{s}$ verschoben. Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das *skalare Produkt* aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\phi)$$

Ein einführendes Beispiel

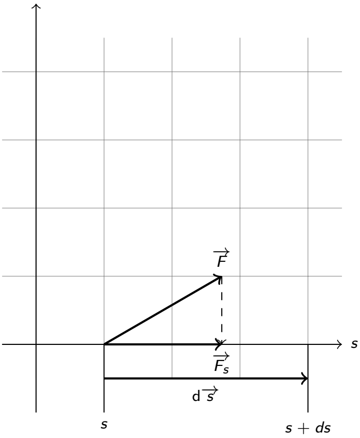


Verschiebung längs einer Geraden durch eine ortsabhängige Kraft

Die auf den Massenpunkt einwirkende Kraft ist jetzt von Ort zu Ort *verschieden:* $\vec{F} = \vec{F_s}$. Wir zerlegen das *geradlinige* Wegstück in eine grosse Anzahl von sehr kleinen *Wegelementen*, längs eines jeden Wegelementes darf dann die einwirkende Kraft als *nahezu konstant* betrachtet werden. Die bei einer *infinitesimal kleinen* Verschiebung das Massenpunktes um $d\,\vec{s}$ verrichtete Arbeit beträgt dann definitiongemäss

$$dW = \vec{F}(s) \cdot d\,\vec{s} = F_s(s)ds.$$

Ein einführendes Beispiel



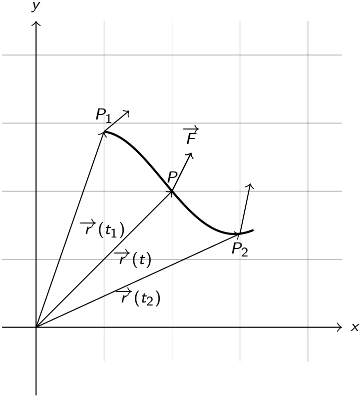
Verschiebung längs einer Geraden durch eine ortsabhängige Kraft

$\vec{F_s}(s)$ ist dabei die *Kraftkomponente in Wegrichtung*. Durch *Integration* erhalten wir die insgesamt von der Kraft $\vec{F}(s)$ längs des Weges von s_1 nach s_2 geleistete Arbeit.

Sie führt uns zum *Arbeitsintegral*

$$W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds.$$

Ein einführendes Beispiel

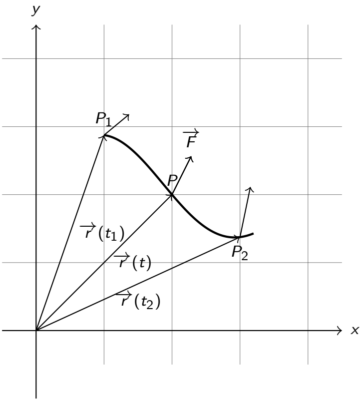


Allgemeiner Fall: Verschiebung längs einer Kurve in einem Kraftfeld

In einem *ebenen Kraftfeld* $\vec{F}(x;y)$ soll ein Massenpunkt vom Punkt P_1 aus längs einer Kurve C mit dem Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ in den Punkt P_2 verschoben werden ($t_1 \leq t \leq t_2$).
Beim Verschieben des Massenpunktes von P aus um ein *infinitesimal kleines* Wegelement $d\vec{r}$ in den Punkt Q verrichtet das Kraftfeld die Arbeit

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \begin{pmatrix} F_x(x;y) \\ F_y(x;y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= F_x(x;y)dx + F_y(x;y)dy. \end{aligned}$$

Ein einführendes Beispiel



Allgemeiner Fall: Verschiebung längs einer Kurve in einem Kraftfeld

Die bei einer Verschiebung auf der Kurve C von P_1 nach P_2 *insgesamt* vom Kraftfeld aufzubringende Arbeit erhalten wir durch *Integration*:

$$\begin{aligned} W &= \int_C dW \\ &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_C (F_x(x;y)dx + F_y(x;y)dy) \end{aligned}$$

Ein einführendes Beispiel

- Für die Koordinaten x und y setzt man die Parametergleichungen $x(t)$ bzw. $y(t)$ der Integrationskurve C ein.
- Die längs dieses Weges wirkende Kraft hängt dann nur noch vom *Kurvenparameter* t ab.
- Das Wegelement $d\vec{r}$ ersetzen wir noch durch den Tangentenvektor $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ und das Differential dt des Parameters t.
- Es gilt

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{und somit} \quad d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\,dt = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt$$

Ein einführendes Beispiel

Das *Arbeitsintegral (Linienintegral)* $\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ geht schliesslich mit Hilfe dieser Substitution in ein *gewöhnliches* Integral über :

$$\begin{aligned} W &= \int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}})dt \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} (F_x(x(t); y(t))\dot{x}(t) + F_y(x(t); y(t))\dot{y}(t))dt \end{aligned}$$

Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals

Definition

$\overrightarrow{F}(x; y; z)$ sei ein räumliches Vektorfeld, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ der Ortsvektor einer von P_1 nach P_2 verlaufenden Raumkurve C mit $t_1 \leq t \leq t_2$ und $\dot{\overrightarrow{r}} = \dot{\overrightarrow{r}}(t)$ der zugehörige Tangentenvektor der Kurve.
Dann heisst das Integral

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_C (\overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}})dt$$

das *Linien-* oder *Kurvenintegral* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}(x; y; z)$ längs der Raumkurve C.

Anmerkung

- Das *Linien-* oder *Kurvenintegral* lautet in ausführlicher Schreibweise:

$$\int_C [F_x(x; y; z)dx + F_y(x; y; z)dy + F_z(x; y; z)dz] = \int_{t_1}^{t_2} [F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}]\, dt$$

Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals

- Man beachte, dass der Wert eines Linien- oder Kurvenintegrals im Allgemeinen nicht nur vom *Anfangs*- und *Endpunkt*- des Integrationsweges sondern auch noch vom *eingeschlagenen* Verbindungsweg abhängt.
- Wird der Integrationsweg C in der *umgekehrten* Richtung durchlaufen (symbolische Schreibweise: $-C$), so tritt im Integral ein *Vorzeichenwechsel* ein:

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Für ein Kurvenintegral längs einer *geschlossenen* Linie C verwenden wir das Symbol

$$\oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ein solches Kurvenintegral wird in den physikalisch-technischen Anwendungen auch als *Zirkulation* des Vektorfeldes $\vec{F}$ längs der *geschlossenen* Kurve C bezeichnet.

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Die *Berechnung* eines Kurvenintegrals $\int(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})dt$ erfolgt in *zwei* Schritten:

1.
   - Zunächst werden im Vektorfeld $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix}$ die Koordinaten x, y, z der Reihe nach durch die *parameterabhängigen* Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ der Raumkurve C ersetzt.
   - Das Vektorfeld und seine Komponenten hängen dann nur noch vom Parameter t ab.
   - Dann *differenziert* man den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ nach dem Parameter t, erhält den Tangentenvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ und bildet das *skalare Produkt* aus Vektorfeld und Tangentenvektor.
2. Das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ hängt jetzt nur noch vom *Parameter* t ab, ist also eine *Funktion* von t und wird nach dieser Variablen in den Grenzen von t_1 bis t_2 *integriert*.

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Beispiel

- Wir berechnen das *Linienintegral* des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x \\ e^x \end{pmatrix}$ also $\int\limits_C (ye^x dx + e^x dy)$ längs des *parabelförmigen* Verbindungsweges C: $x = t$, $y = t^2$ zwischen den beiden Punkten $O = (0;0)$ und $P = (1;1)$.
- Längs dieses Weges gilt $(0 \leq t \leq 1)$:

$$\begin{aligned} x &= t & \dot{x} &= 1 & dx &= dt \\ y &= t^2 & \dot{y} &= 2t & dy &= 2t\ dt. \end{aligned}$$

- Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in das Linienintegral erhalten wir dann:

$$\int\limits_C (ye^x dx + e^x dy) = \int\limits_0^1 (t^2 \cdot e^t dt + e^t \cdot 2t\ dt) = \int\limits_0^1 (t^2 + 2t)e^t\ dt$$

$$= \left[(t^2 + 2t)e^t\right]_0^1 - \int\limits_0^1 (2t+2)e^t\ dt = 3e - \left[(2t+2)e^t\right]_0^1 + \int\limits_0^1 2e^t\ dt$$

$$= 3e - 4e + 2e = e$$

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Beispiel

- Welchen Wert besitzt das *Linienintegral* des räumlichen Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ x^2yz \\ x + z \end{pmatrix}$ längs der Kurve C, die durch den Ortsvektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ beschrieben wird?

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Lösung:

- Es gilt

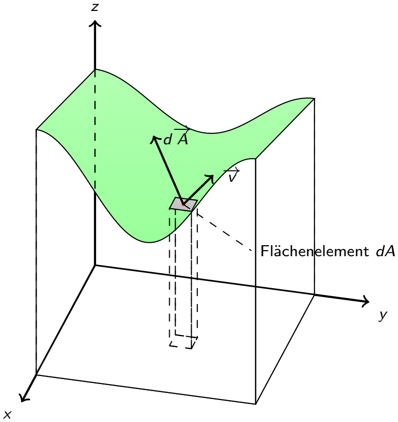
$$\begin{aligned}\vec{F}(x(t),y(t),z(t)) &= \begin{pmatrix} 2t+t^4 \\ t^5 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} &= (2t+t^4)\cdot 1 + t^5\cdot 2t + 2t\cdot 1 \\ &= 2t^6+t^4+4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_C (\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}})dt &= \int_0^1 (2t^6+t^4+4t)dt \\ &= \left[\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{5}t^5+2t^2\right]_0^1 \\ &= \frac{87}{35}\end{aligned}$$

Oberflächenintegrale: Ein einführendes Beispiel

- Wir gehen von einer Flussigkeitsströmung aus, deren Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ sich von Ort zu Ort *verändert*: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x; y; z)$.

  Wir ermitteln den Fluss durch eine beliebig *gekrümmte* Fläche A, die wir in das Strömungsfeld eingebracht haben.



Oberflächenintegrale: Ein einführendes Beispiel

- Der Flüssigkeitsfluss durch ein solches Flächenelement dA ist dann wiederum durch das *skalare Produkt*

$$\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N})dA$$

  gegeben.

- Der *Gesamtfluss* durch die Fläche A wird bestimmt, indem wir über die Beiträge aller in der Fläche gelegenen Flächenelemente *summieren*, d.h *integrieren*.

- Die in der Zeitenheit durch die Fläche A strömende Flussigkeitsmenge ist somit das Integral

$$\iint\limits_{(A)} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{A} = \iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N})dA$$

Definition eines Oberflächenintegrals

Wir interessieren uns für den " Fluss" eines Vektorfeldes $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x; y; z)$ durch eine orientierte Fläche A im Raum, wobei wir schrittweise wie folgt vorgehen wollen:

- Zunächst wird die Fläche A in eine sehr grosse Anzahl n von Teilflächen ΔA_1,ΔA_2,..,ΔA_n zerlegt.
- Jede Teilfläche kann dabei als *nahezu eben* betrachtet und somit durch ein *vektorielles* Flächenelement beschrieben werden.
- Der k-ten Teilfläche ΔA_k entspricht also das *vektorielle* Flächenelement $\Delta\overrightarrow{A_k}$ mit $|\Delta\overrightarrow{A_k}| = \Delta A_k$.

Definition eines Oberflächenintegrals

- Sei $P_k = (x_k; y_k; z_k)$ ein beliebig gewählter Punkt auf ΔA_k.
  Der *Fluss* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ durch die Teilfläche ΔA_k ist dann
  $$\overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{A_k}$$
- Ist $\overrightarrow{N_k}$ die Flächennormale im Flächenpunkt P_k, so können wir dafür auch schreiben:
  $$(\overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{N_k})\Delta A_k$$
- Durch Summierung über alle Teilflächen erhalten wir für den gesuchten *Gesamtfluss* den folgenden *Näherungswert*:
  $$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{A_k} = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{N_k})\Delta A_k$$

Definition eines Oberflächenintegrals

Definition

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta A_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\vec{A_k}$$

wird (falls er *vorhanden* ist) als *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes $\vec{F} = \vec{F}(x_k; y_k; z_k)$ über die *orientierte* Fläche A bezeichnet und durch das Symbol

$$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$$

gekennzeichnet.

Definition eines Oberflächenintegrals

Anmerkungen

- Die *Orientierung* der Fläche ist durch die Flächennormale $\overrightarrow{N}$ *eindeutig* festgestelt. Bei einer *geschlossenen* Fläche, z.B der Oberfläche einer Kugel, eines Zylinder oder eines Quaders, zeigt dabei $\overrightarrow{N}$ vereinbarungsgemäss nach aussen.
- Das Oberflächenintegral über eine *geschlossene* Fläche A wird durch das Symbol

$$\oiint_{(A)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \oiint_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA$$

  gekennzeichnet.
- Mit $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{N}$ erhalten wir $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} = 1$ und

$$\oiint_{(A)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = A$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

Verwendung symmetriegerechter Koordinaten

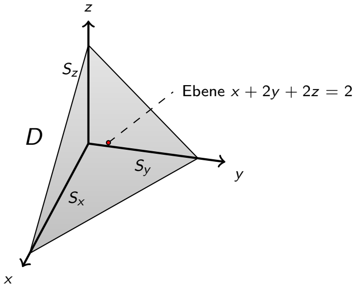
Die *Berechnung* eines Oberflächenintegrals $\iint\limits_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$ erfolgt in *vier* Schritten:

1. Zunächst werden *geeignete* Koordinaten ausgewählt, die sich der Symmetrie des Problems in *optimaler* Weise anpassen.
   Zur Auswahl stehen dabei *kartesische* Koordinaten (x, y, z), *Zylinderkoordinaten* (ρ, ϕ, z), *Kugelkoordinaten* (r, ν, ϕ).
2. Man bestimme dann die *Flächennormale* $\vec{N}$, berechne anschliessend das *Skalarprodukt* $\vec{F} \cdot \vec{N}$ und drücke dieses sowie das Flächenelement dA durch die gewählten Koordinaten aus.
3. Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
4. Berechnung des Doppelintegrals in der bekannten Weise.

Berechnung eines Oberflächenintegrals

Beispiel

- Wie gross ist der *Fluss* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 6z \\ -3y \\ 3 \end{pmatrix}$ durch die im *ersten* Oktant gelegene Fläche D der Ebene $x + 2y + 2z = 2$, die wir *grau* unterlegt haben?



Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Die Flächennormale $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}(x;y;z)$ ist der normierte Vektor, der in jedem Punkt (x,y,z) der Fläche über der wir das Oberflächenintegral betrachten, senkrecht steht. In diesem Fall ist die Situation einfach. Der Vektor $\overrightarrow{N}$ ist konstant, da die Fläche D ein Auschnitt der Ebene $x+2y+2z=2$ ist, auf der z.B. der Vektor

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(überall) senkrecht steht.

- Durch *Normierung* erhalten wir daraus dann die benötigte *Flächennormale* $\overrightarrow{N}$:

$$\overrightarrow{N}(x;y;z) = \overrightarrow{N} = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Es gilt (in den gewählten kartesischen Koordinaten)

$$\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} 6z \\ -3y \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{N}(x;y;z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Wir bestimmen das *Skalarprodukt* $\vec{F} \cdot \vec{N}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 6z \\ -3y \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2z - 2y + 2 = 2(z - y + 1)$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Auf der gegebenen Fläche D ist die Variable z nicht unabhängig von x und y, da ja die Ebenengleichung $x + 2y + 2z = 2$ erfüllt sein muss. Wenn wir x und y als unabhängige Variablen ansehen, dann muss zwingend $z = \frac{1}{2}(2 - x - 2y)$ gelten (man könnte auch zwei andere der Variablen x, y, z als unabhängig betrachten und die dritte entsprechend ausdrücken). In unserem Fall gilt also auf der Fläche, dass

$$z = \frac{1}{2}(2 - x - 2y)$$

- Wir ersetzen also die Variable z im Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \vec{N}$ durch diesen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{N} &= 2(z - y + 1) = 2\left(\frac{1}{2}(2 - x - 2y) - y + 1\right) \\ &= -x - 4y + 4 \end{aligned}$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Jetzt müssen wir noch mit dem in der Fläche D liegenden *Flächenelement* dA beschäftigen und versuchen dieses durch die unabhängigen kartesischen Koordinaten x, y auszudrücken.
- Die *Projektion* des Flächenelementes dA in die (x, y)-Ebene ergibt ein infinitesimales Rechteck mit dem Flächeninhalt $dA^* = dx\ dy$.
- Andererseits ist diese Projektion aber das *skalare Produkt* aus dem vektoriellen Flächenelement $d\overrightarrow{A} = dA\ \overrightarrow{N}$ und dem Einheitsvektor $\overrightarrow{e_z}$ in Richtung der positiven z-Achse.
- Somit gilt:

$$\begin{aligned} dA^* &= d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{e_z} \\ &= dA(\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{e_z}) \\ &= dy\ dx \end{aligned}$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Mit

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{e_z} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

folgt dann:

$$dA \cdot \frac{2}{3} = dy\ dx \quad \text{oder} \quad dA = \frac{3}{2} dy\ dx$$

Damit haben wir das Flächenelement dA in *kartesischen* Koordinaten ausgedrückt.

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Jetzt möchten wir noch die Fläche in der Aufgabenstellung durch die Variablen x und y ausdrücken.

  Die *Schnittkurve* der Fläche $x + 2y + 2z = 2$ mit der x, y-Ebene $z = 0$ lautet:

$$x + 2y = 2 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

- Somit ist die Fläche D beschrieben durch

$$(D) = \{(x, y, \frac{1}{2}(2 - x - 2y)) \mid 0 \leq x \leq 2\,,\, 0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{2}x\}$$

  und es ergeben sich die folgenden *Integrationsgrenzen*:

y-Integration:	Von $y = 0$ bis $y = -\frac{1}{2}x + 1$
x-Integration:	Von $x = 0$ bis $x = 2$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Das Flussintegral (Oberflächenintegral) $\iint\limits_{(D)}(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N})dA$ lässt sich dann wie folgt durch ein *Doppelintegral* in kartesischen Koordinaten darstellen

$$\iint\limits_{(D)}(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N})dA = \int\limits_{x=0}^{2}\int\limits_{y=0}^{1-\frac{1}{2}x}\underbrace{(-x-4y+4)}_{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N}}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}dy\ dx}_{dA}$$

welches sich wie gewohnt lösen lässt.

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- *Innere Integration (nach der Variablen y)*;

$$\int\limits_{y=0}^{-\frac{1}{2}x+1} (-x-4y+4)\cdot\frac{3}{2}dy\ dx \quad = \quad \frac{3}{2}\left[-xy-2y^2+4y\right]_{y=0}^{y=1-\frac{1}{2}x}$$

$$= \quad \frac{3}{2}(2-x)$$

- *Äussere Integration (nach der Variablen x)*;

$$\int\limits_{x=0}^{2} \frac{3}{2}(2-x)dx \quad = \quad \frac{3}{2}\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3$$

- Unser *Oberflächenintegral* besitzt damit den folgenden Wert:

$$\iint\limits_{(D)} (\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N})dA = 3$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Ist die vom Vektorfeld $\vec{F}$ "durchflutete" Fläche A in der *vektoriellen Form (Parameterform)*

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} x(u; v) \\ y(u; v) \\ z(u; v) \end{pmatrix}$$

gegeben, so sind die Flächennormale $\vec{N}$ und das Flächenelement dA in den Parametern u und v gegeben durch

$$\vec{N} = \frac{\vec{t_u} \times \vec{t_v}}{|\vec{t_u} \times \vec{t_v}|} \qquad \text{und} \qquad dA = |\vec{t_u} \times \vec{t_v}| du\ dv,$$

wobei

$$\vec{t_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \qquad \text{und} \qquad \vec{t_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

die Ableitungen des Vektors $\vec{r}$ nach den Parametern u resp. v beschreiben. Es gilt somit

$$(\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \left(\vec{F} \cdot \frac{\vec{t_u} \times \vec{t_v}}{|\vec{t_u} \times \vec{t_v}|} \right) |\vec{t_u} \times \vec{t_v}| du\ dv = \vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v}) du\ dv.$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern

Die von einem Vektorfeld $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x; y; z)$ "durchflutete" Fläche A sei durch einen von den beiden *Parametern* u und v abhängigen Ortsvektor $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u; v)$ gegeben.

Dann besitzt das Oberflächenintegral $\iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA$ die folgende Gestalt:

$$\iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA = \iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v})) du\, dv$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Die Integralberechnung erfolgt dabei in *vier* Schritten:

- Das Vektorfeld $\vec{F}$ wird zunächst durch die *Flächenparameter* u und v ausgedrückt:

$$\vec{F}(x; y; z) = \vec{F}(x(u; v); y(u; v); z(u; v))$$

- Man bilde dann die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Fläche, also die Vektoren

$$\vec{t_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \quad \text{und} \quad \vec{t_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

  und bestimme anschliessend mit ihnen das Produkt (*Spatprodukt*)

$$\vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v})$$

- Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
- *Berechnung* des Doppelintegrals in der bekannten Weise.

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Beispiel

- Wir berechnen den *Fluss* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$ durch die Mantelfläche A eines Zylinder mit Boden in der xy-Ebene, Radius 5 und Höhe 10.

  Die Mantelfläche dieses Zylinders kann durch den *parameterabhängigen* Ortsvektor

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u; v) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(u) \\ 5 \cdot \sin(u) \\ v \end{pmatrix} \qquad 0 \leq u \leq 2\pi \ , \ 0 \leq v \leq 10.$$

  beschrieben werden (Erinnerung: Zylinderkoordinaten).

Oberflächenintegral in Flächenparametern

- Somit wird das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ auf der Mantelfläche des Zylinders mithilfe der Parameter u, v zu

$$\overrightarrow{F}(x(u;v);y(u;v);z(u;v)) = \begin{pmatrix} 5\cdot\sin(u) \\ 5\cdot\cos(u) \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

- Als nächstes bestimmen wir die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Zylinderfläche und deren *Vektorprodukt*:

$$\vec{t_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -5 \cdot \sin(u) \\ 5 \cdot \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{t_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t_u} \times \vec{t_v} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(u) \\ 5 \cdot \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Damit erhalten wir für das benögtige *Spatprodukt* $\vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v})$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v}) &= \begin{pmatrix} 5 \cdot \sin(u) \\ 5 \cdot \cos(u) \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(u) \\ 5 \cdot \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 50 \cdot \sin(u) \cos(u) \\ &= 25 \cdot \sin(2u) \end{aligned}$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

- Unser Flussintegral lautet damit:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot (\vec{t_u} \cdot \vec{t_v}))\ du\ dv \\
&= \iint\limits_{(A)} 25 \cdot \sin(2u) du\ dv \\
&= 25 \int\limits_{v=0}^{10} \int\limits_{u=0}^{2\pi} \sin(2u) du\ dv \\
&= 25 \int\limits_{v=0}^{10} -\frac{1}{2}(\cos(4\pi) - \cos(0))\ dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche

Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche

Der Fluss eines *homogenen Vektorfeldes* $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{const}$ durch die Oberfläche eines Würfels ist gleich *Null*.
Diese Aussage gilt auch für eine beliebige *geschlossene* Oberfläche A:

$$\oint\!\!\!\oint_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA = 0$$