Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik II
Frühlingssemester 2019
Kapitel 13: Integralsätze von Gauss und Stokes

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

13. Integralsätze von Gauss und Stokes
- Gauss'scher Integralsatz
  - Ein einführendes Beispiel
  - Gauss'scher Integralsatz im Raum
- Stokes'scher Integralsatz

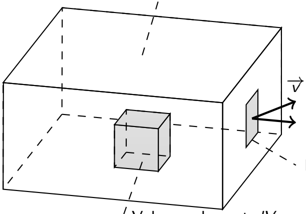
Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 205 – 222**,
  Seiten 245 – 248 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Ein einführendes Beispiel

- Eine Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(x; y; z)$ durchströme den dargestellten *quaderförmigen* Bereich mit Volumen V.
- Durch das *grau* unterlegte Flächenelement dA der Quaderoberfläche fliesst dann die folgende Flüssigkeitsmenge (Flüssigkeitsvolumen):

$$(\vec{v} \cdot \vec{N})dA = \vec{v} \cdot \vec{dA}$$



Flüssigkeitsströmung
durch einen quaderförmigen Bereich

- Dabei ist $\vec{N}$ die *Flächennormale* und $d\vec{A} = dA\ \vec{N}$ das *vektorielle* Flächenelement.
- Der Gesamtfluss durch die *geschlossene* Hülle A (Oberfläche des Quaders) pro Zeiteinheit ist somit durch das *Oberflächenintegral*

$$\underset{(A)}{\oiint}(\vec{v} \cdot \vec{N})dA = \underset{(A)}{\oiint} \vec{v} \cdot \vec{dA}$$

gegeben.

Ein einführendes Beispiel

- Nun beschäftigen wir uns mit der Flüssigkeitsmenge, die in dem quaderförmigen Bereich durch die dortigen *Quellen* und *Senken* der Flüssigkeit pro Zeiteinheit "erzeugt" bzw. "vernichtet" wird.
- Wir betrachten ein Volumenelement dV im Innern des Quaders.
- In ihm wird pro Zeitenheit die Flüssigkeitsmenge

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{v})\ dV$$

  "erzeugt" oder "vernichtet", je nachdem, ob sich dort eine Quelle *oder* Senke befindet.
- Somit wird *insgesamt* im Quadervolumen V pro Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}(\overrightarrow{v})\ dV$$

  "erzeugt" oder "vernichtet".

Ein einführendes Beispiel

- Diese Menge muss aber bei einer Flüssigkeit mit *konstanter* Dichte in der Zeiteinheit durch die Quaderoberfläche A hindurchfliessen.
- Mit anderen Worten:

  die in der Zeiteinheit im Quadervolumen V “erzeugte” bzw. “vernichtete” Flussigkeitsmenge $\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(\overrightarrow{v})\, dV$ muss dem Gesamtfluss $\oiint\limits_{(A)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dA}$ durch die Quaderoberfläche entsprechen.
- Somit gilt:

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(\overrightarrow{v})\, dV = \oiint\limits_{(A)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Gauss'scher Integralsatz im Raum

Gauss'scher Integralsatz im Raum

Das *Oberflächintegral* eines Vektorfeldes $\vec{F}$ über eine *geschlossene* Fläche A ist gleich dem *Volumenintegral* der Divergenz von $\vec{F}$, und zwar über dem von der Fläche A eingeschlossene *Volumen* V:

$$\begin{aligned} \oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{dA}) \\ &= \iiint_{(V)} div(\vec{F})\, dV \end{aligned}$$

Dabei bedeuten:

$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$:	Stetig differenzierbares Vektorfeld
A :	*Geschlossene* Fläche (Oberfläche), die das Volumen V einschliesst
V:	*Räumlicher* Bereich (Volumen) mit der geschlossenen Oberfläche A
$\vec{N}$:	Nach aussen gerichtete Flächennormale

Gauss'scher Integralsatz im Raum

Anmerkungen

- Mit Hilfe des *Gauss'schen Integralsatzes* lässt sich ein Volumenintegral über die *Divergenz* eines Vektorfeldes in ein *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes über die (geschlossene) Oberfläche dieses Volumens *umwandeln* und umgekehrt.
- Im "Strömungsmodell" hat das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ die Bedeutung des *Geschwindigskeitsfeldes* einer strömenden Flüssigkeit, und die durch den *Gauss'schen Integralsatz* miteinander verknüpften Oberflächen- und Volumenintegrale haben dann die folgende anschauliche Bedeutung:

  $\oiint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA$: Flüssigskeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die *geschlossene* Hülle A fliesst

  $\iiint\limits_{(V)} div(\overrightarrow{F})\, dV$: Im Gesamtvolumen V pro Zeiteinheit "erzeugte" bzw. "vernichtete" Flüssigkeitsmenge

Gauss'scher Integralsatz im Raum

Beispiel

- Mit Hilfe des *Gauss'schen Integralsatzes* soll der Fluss des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche eines *Zylinders* mit dem Radius $R = 2$ und der Höhe $H = 5$ berechnet werden. Es gilt:

$$\underset{(A)}{\oiint}(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N})dA \quad = \quad \underset{(V)}{\iiint} div(\overrightarrow{F})\ dV$$

  (A: Zylinderoberfläche; V : Zylindervolumen).

- Die Berechnung des Flusses erfolgt hier über das *Volumenintegral* der rechten Seite.

  Dazu benötigen wir zunächst die Divergenz des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$:

$$\begin{aligned} div(\overrightarrow{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= 3x^2 - 1 + 1 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Gauss'scher Integralsatz im Raum

Beispiel

- Somit ist

$$\iiint\limits_{(V)} div(\overrightarrow{F})\ dV \quad = \quad 3 \cdot \iiint\limits_{(V)} x^2\ dV$$

- Um dieses Volumenintegral zu berechnen, bieten sich *Zylinderkoordinaten* an:

$$x = r \cdot \cos(\phi), \quad y = r \cdot \sin(\phi), \quad z = z, \quad dV = \rho\ dz\ d\rho\ d\phi$$

  Die *Integrationsgrenzen* des Volumensintegrals (Dreifachintegrals) lauten dann:

z-Integration:	Von $z = 0$ bis $z = 5$
r-Integration:	Von $r = 0$ bis $r = 2$
ϕ-Integration:	Von $\phi = 0$ bis $\phi = 2\pi$

Gauss'scher Integralsatz im Raum

- Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{(V)} div(\overrightarrow{F})\ dV &= 3 \iiint\limits_{(V)} x^2\ dV \\
&= 3 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{5} (r \cdot \cos(\phi))^2 \cdot r\ dz\ dr\ d\phi \\
&= 3 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \cos(\phi)^2 r^3 \int\limits_{z=0}^{5}\ dz\ dr\ d\phi \\
&= 3 \cdot 5 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \cos(\phi)^2 \int\limits_{r=0}^{2} r^3\ dr\ d\phi
\end{aligned}$$

Gauss'scher Integralsatz im Raum

- und weiter

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{(V)} div(\overrightarrow{F})\ dV &= 15 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \cos(\phi)^2 \underbrace{\left[\frac{r^4}{4}\right]^2_{r=0}}_{=4}\ d\phi \\
&= 60 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\cos(2\phi)+1}{2} d\phi \\
&= 60 \cdot \left[\frac{\sin(2\phi)/2+\phi}{2}\right]^{2\pi}_{\phi=0} \\
&= 60\pi
\end{aligned}$$

Gauss'scher Integralsatz in der Ebene

Gauss'scher Integralsatz in der Ebene

$$\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds = \iint_{(A)} div(\vec{F}) \, dA$$

Dabei bedeuten:

$\vec{F} = \vec{F}(x; y)$:	Stetig differenzierbares *ebenes* Vektorfeld
A:	*Ebenes* Flächenstück
C:	*Geschlossene* und *orientierte* Randkurve der Fläche A
$\vec{N}$:	Nach *aussen* gerichtete Kurvennormale
ds:	Linienelement der Randkurve C

Gauss'scher Integralsatz in der Ebene

Beispiel

- Wir "verifizieren" den *Gauss'schen Integralsatz* in der Ebene für das Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x;y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ und die Kreisfläche A mit dem Radius $R = 2$.
- **Berechnung des Kurvenintegrals** $\oint\limits_C (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N})ds$

  Integriert wird über die Normalkomponente des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ längs der geschlossenen Kreislinie C mit dem Radius $R = 2$ um den Nullpunkt. Die *Kurvennormale* $\overrightarrow{N}$ zeigt dabei nach Konvention nach aussen. Somit gilt:

$$\overrightarrow{N}(x;y) = \frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Für die *Normalkomponente* von $\overrightarrow{F}$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Gauss'scher Integralsatz in der Ebene

- Längs des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ besitzt sie den *konstanten* Wert

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Das *Kurvenintegral* hat daher den folgenden Wert:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds \;=\; 4 \oint_C ds \;=\; 4 \cdot \text{Länge von } C \;=\; 16\pi$$

- **Berechnung des Doppelintegrals** $\iint\limits_{(A)} \mathbf{div}\ \vec{F}\, dA$

Integrationsbereich ist die Kreisfläche A. Mit

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2 + 2 = 4$$

$$\iint\limits_{(A)} \operatorname{div} (\vec{F}) dA \;=\; 4 \iint\limits_{(A)} dA \;=\; 4 \cdot \text{Fläche von } A \;=\; 16\pi$$

Stokes'scher Integralsatz

Stokes'scher Integralsatz

Das Kurven- oder *Linienintegral* eines Vektorfeldes $\vec{F}$ längs einer einfach *geschlossenen* Kurve C ist gleich dem *Oberflächenintegral* der Rotation von $\vec{F}$ über eine beliebige Fläche A, die durch die Kurve C *berandet* wird:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \iint_{(A)} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\,\vec{A} = \iint_{(A)} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}\,dA$$

Dabei bedeuten:

$\vec{F} = \vec{F}(x;y;z)$:	Stetig differenzierbares Vektorfeld
A:	Fläche mit der Randkurve C
$\vec{N}$:	Flächennormale
C:	*Orientierte* Randkurve der Fläche A, wobei die positive Umlaufsrichtung wie folgt festgelegt wird: ein Beobachter, der in die Richtung der Flächennormalen $\vec{N}$ schaut, durchläuft die Randkurve C dabei so, dass die Fläche *links* liegen bleibt.

Stokes'scher Integralsatz

Anmerkung

- Der *Wirbelfluss* durch eine *geschlossene* Fläche A (das heisst durch die Oberfläche eines räumlichen Bereiches) ist gleich *Null*:

$$\iint_{(A)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dA = 0$$

  Denn: Die Randkurve C der *geschlossenen* Fläche A ist auf einen *Punkt* zusammengezogen, das Linienintegral $\oint_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *verschwindet* also.

- Der *Wirbelfluss* eines Vektorfeldes $\vec{F}$ ist für *alle* Flächen A, die von der gleichen Kurve C berandet werden, *gleich gross*, d.h. *völlig unabhängig* von der Gestalt der Fläche.

Stokes'scher Integralsatz

Beispiele

Die folgenden Flächen besitzen jeweils die *gleiche* Randkurve C:

- A_1 : Mantelfläche der *Halbkugel*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0$$

- A_2 : Mantelfläche der *Rotationsparaboloids*

$$z = 1 - x^2 - y^2, \; z \geq 0$$

- A_3 : *Kreisfläche*

$$x^2 + y^2 \leq 1, \; z = 0$$

Die *Randkurve* ist in allen drei Fällen der *Ursprungskreis* mit dem Radius $R = 1$.

Der *Wirbelfluss* eines beliebigen (stetig differenzierbaren) Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ durch die drei Flächen ist daher nach dem Stokes'schen Integralsatz *gleich gross*.

Stokes'scher Integralsatz

Beispiel

Wir "verifizieren" den *Stokes'schen Integralsatz* für das Vektorfeld

$$\overrightarrow{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$$

und die Mantelfläche A der *Halbkugel* $x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0$.

- **Berechnung des Kurvenintegrals** $\oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

  Die Mantelfläche der Halbkugel wird in der x,y-Ebene durch den *Einheitskreis* C mit der Parameterdarstellung

  $$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad z(t) = 0\ text, \ (0 \leq t \leq 2\pi)$$

  berandet. Der Ortsvektor der Kurve C ist also

  $$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stokes'scher Integralsatz

- Wir ersetzen im Vektorfeld die Koordinaten durch die Parametrisierung der Kurve C

$$\vec{F}(x(t); y(t); z(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t)^2 + \sin(t)^2 \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann differenzieren wir den Ortsvektor $r(t)$ der Kurve C

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und bilden das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin(t) + \sin(t)\cos(t).$$

Stokes'scher Integralsatz

- Zuletzt integrieren wir $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ in den Grenzen der Variablen t, welche die Kurve C beschreibt:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t) + \sin(t)\cos(t))dt \\ &= \left[\cos(t) + \frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{2\pi} \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

- Das Kurvenintegral $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ besitzt damit den Wert *Null*.

Stokes'scher Integralsatz

- **Berechnung des "Wirbelflusses"** $\oiint\limits_{(A)} (\mathbf{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A})$

  Wir bestimmen zunächst die *Rotation* des Vektorfeldes $\vec{F}$ mithilfe der "Determinantendarstellung":

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y & z^2 \end{vmatrix} \\ &= 0\,\vec{e}_x - 0\,\vec{e}_y - 2y\,\vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Stokes'scher Integralsatz

- Um das geforderte Oberflächenintegral auszurechnen brauchen wir eine Parametrisierung der Fläche A, in unserem Fall die Mantelfläche der Halbkugel. Dafür bieten sich Kugelkoordinaten an. Die Mantelfläche der gegebenen Halbkugel ist (Radius = 1) gegeben durch

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u; v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\sin(v) \\ \sin(u)\sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix} \qquad 0 \leq u \leq 2\pi\,,\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

- Somit wird das Vektorfeld $\operatorname{rot}(\overrightarrow{F})$ auf der Mantelfläche der Halbkugel mithilfe der Parameter u, v zu

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sin(u)\sin(v) \end{pmatrix}.$$

Stokes'scher Integralsatz

- Als nächstes bestimmen wir die Tangentenvektoren an die Parameterlinien der Fläche und deren Vektorprodukt:

$$\vec{t_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin(u)\sin(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{t_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{t_u} \times \vec{t_v} = \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(v)\cos(v) \end{pmatrix}$$

- Damit erhalten wir für das Produkt $\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v})$ den folgenden Ausdruck:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sin(u)\sin(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(v)\cos(v) \end{pmatrix}$$
$$= -2\sin(u)\sin(v)^2\cos(v).$$

Stokes'scher Integralsatz

- Das Oberflächenintegral lautet damit:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(A)} \operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{N}\ dA &= \iint\limits_{(A)} (\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot (\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v}))\, du\, dv \\
&= \int\limits_{u=0}^{2\pi} \int\limits_{v=0}^{\pi/2} (-2\sin(u)\sin(v)^2\cos(v))\ dv\ du \\
&= -2 \int\limits_{u=0}^{2\pi} \sin(u)\, du \int\limits_{v=0}^{\pi/2} \sin^2(v)\cos(v)\ dv \\
&= -2\Big[-\cos(u)\Big]_{u=0}^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3}\sin^3(v)\right]_{v=0}^{\pi/2} \\
&= -2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Stokes'scher Integralsatz

- Damit haben wir den *Stokes'schen Integralsatz* verifiziert.
  In diesem Beispiel gilt also:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{r} = \iint_{(A)} \operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{N}\; dA = 0$$