Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I+II
Frühlingsemester 2019
Kapitel 8: Lineare Algebra
8.3 Ergänzungen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

8. Lineare Algebra: 3. Ergänzungen

- Reguläre Matrizen
- Inverse Matrix
- Orthogonale Matrix

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 54 - 63,**
  Seiten 151 - 154 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Definition einer regulären Matrix

Definition

Eine n-reihige, quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heisst *regulär*, falls ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt.
Andernfalls heisst sie *singulär*.

Anmerkungen

- $\mathbf{A}$ is *regulär*, falls $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist, und singulär, falls $\det \mathbf{A} = 0$ ist.
- Man beachte: Die Begriffe " *Reguläre Matrix* " und " *Singuläre Matrix* " sind **nur** für *quadratische* Matrizen definiert.

Beispiel

- Die 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist *regulär*, da ihre Determinante einen von Null *verschiedenen* Wert besitzt:
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

Inverse Matrix

Definition

Gibt es zu einer *n*-reihigen, quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ eine Matrix $\mathbf{X}$ mit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

(wobei $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix bezeichnet) so heisst $\mathbf{X}$ die zu $\mathbf{A}$ *inverse Matrix* und wird durch das Symbol $\mathbf{A}^{-1}$ gekennzeichnet.

Anmerkungen

- Eine *quadratische* Matrix besitzt - wenn überhaupt - *genau eine* Inverse.
- Besitzt eine Matrix $\mathbf{A}$ eine *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, so heisst $\mathbf{A}$ *invertierbar (umkehrbar)*. Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ wird auch als *Kehrmatrix*, *Umkehrmatrix*, oder *Inverse* von $\mathbf{A}$ bezeichnet. Sie ist wie $\mathbf{A}$ *n*-reihig.
- Die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ einer Matrix $\mathbf{A}$ existiert nur falls $\mathbf{A}$ regulär ist, d.h. falls $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist. Diese Bedingung ist *notwendig und hinreichend*.

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Zu jeder *regulären* n-reihigen Matrix $\mathbf{A}$ gibt es genau eine *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Dabei bedeuten:

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$: *Algebraisches Komplement* von a_{ik} in $\det \mathbf{A}$

D_{ik} : $(n-1)$-*reihige Unterdeterminante* von $\det \mathbf{A}$ (in $\det \mathbf{A}$ wird die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen)

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Anmerkungen

- Man beachte die *Reihenfolge* der Indizes. In der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $\mathbf{A}^{-1}$ befindet sich das algebraische Komplement A_{ki} und *nicht* etwa A_{ik}.
- Häufig führt man die zu $\mathbf{A}$ *adjungierte* Matrix ein:

$$\mathbf{A}_{adj} = (A_{ik})^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet sich dann aus $\mathbf{A}_{adj}$ wie folgt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}_{adj}$$

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Beispiel

- Die 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist wegen $\det \mathbf{A} \neq 0$ *regulär* und daher *invertierbar*.
  Die zu $\mathbf{A}$ *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lautet somit :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Matrix

Definition

Eine n-reihige, quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt *orthogonal*, wenn das Matrizenprodukt aus $\mathbf{A}$ und ihrer Transponierten $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ ergibt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{E}$$

Anmerkungen

Für orthogonale Matrizen $\mathbf{A}$ gilt

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk}^\mathsf{T} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad i \neq k \end{cases}$
  Diese Beziehung bedeutet, dass die *Zeilenvektoren* einer orthogonalen Matrix $\mathbf{A}$ *normiert* sind, also *Einheitsvektoren* darstellen und zueinander *orthogonal* sind.
  Ein Vektorsystem mit diesen Eigenschaften wird als *orthonormiert* bezeichnet.
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{E} = 1$
- $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Eigenschaften einer orthogonalen Matrix

Eigenschaften einer orthogonalen Matrix

- Die *Zeilen* bzw. *Spaltenvektoren* einer *orthogonalen* Matrix **A** bilden ein *orthonormiertes* System, stellen also zueinander *orthogonale Einheitsvektoren* dar.
  Dieser Eigenschaft verdanken die orthogonalen Matrizen auch ihren Namen.
- Die *Determinante* einer orthogonalen Matrix **A** besitzt den Wert $+1$ oder -1:
  $$\det \mathbf{A} = +1 \quad \text{oder} \quad \det \mathbf{A} = -1$$
- Bei einer orthogonalen Matrix **A** sind die Transponierte $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ und die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ *identisch*:
  $$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$$
- Das *Produkt* orthogonaler Matrizen ist wiederum eine *orthogonale* Matrix.

Eigenschaften einer orthogonalen Matrix

Beispiele

- Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist zwar *regulär*, sie ist jedoch *nicht* orthogonal: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

ist orthogonal (ϕ beliebig), denn es gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 & 0 \\ 0 & \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Rang einer Matrix

Definition

Werden in einer Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) genau $m - p$ Zeilen und $n - p$ Spalten gestrichen, so heisst die Determinante der p-reihigen Restmatrix (ist vom Typ (p, p)) eine *Unterdeterminante p-ter Ordnung* von $\mathbf{A}$.

Anmerkungen

- Eine *Unterdeterminante p-ter Ordnung*, wird auch als *p-reihige Unterdeterminante* bezeichnet.
- Ist $\mathbf{A}$ eine *n-reihige*, quadratische Matrix, so sind $n - p$ Zeilen und $n - p$ Spalten zu streichen, um eine *p-reihige* Unterdeterminante von $\mathbf{A}$ zu erhalten.

Rang einer Matrix

Beispiel

- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

  ist eine Matrix vom Typ $(3, 4)$. Wir erhalten beispielsweise die folgende 3-reihige Unterdeterminante:

  $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -95$$

Rang einer Matrix

Definition

Unter dem *Rang* einer Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) wird die *höchste* Ordnung r aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von $\mathbf{A}$ verstanden.
Symbolische Schreibweise:

$$Rg(\mathbf{A}) = r$$

Anmerkungen

- Der Rang r ist höchstens gleich der *kleineren* der beiden Zahlen m und n.
- Für eine n-reihige, quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist stets $r \leq n$.
  Inbesondere gilt für eine reguläre bzw. singuläre Matrix:

$$\begin{array}{ll} \textit{Reguläre Matrix } \mathbf{A}: & \det \mathbf{A} \neq 0 \text{ , d.h. } r = n \\ \textit{Singuläre Matrix } \mathbf{A}: & \det \mathbf{A} = 0 \text{ , d.h. } r < n \end{array}$$

- Für die n-reihige *Nullmatrix* $\mathbf{0}$ wird festgesetzt: $Rg(\mathbf{0}) = 0$.

Rangbestimmung einer Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Rangbestimmung einer Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Der Rang r einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ kann wie folgt bestimmt werden (für $m \leq n$):

1. Zunächst werden die *m-reihigen* Unterdeterminanten von $\mathbf{A}$ berechnet. Es gilt $r = m$, wenn es unter ihnen wenigstens *eine* von Null verschiedene Determinante gibt.
2. Verschwinden aber *sämtliche* m-reihigen, so ist r *höchstens gleich* $m - 1$. Es ist daher zu prüfen, ob es wenigstens *eine* von Null verschiedene $(m-1)$-*reihige* Unterdeterminante von $\mathbf{A}$ gibt. Ist dies der Fall, so ist $r = m - 1$. Anderfalls ist r *höchstens* gleich $m - 2$. Das beschriebene Verfahren wird dann solange fortgesetzt, bis man auf eine von Null *verschiedene* Unterdeterminante von $\mathbf{A}$ stößt. Die *Ordnung* r dieser Determinante ist dann der gesuchte *Rang* der Matrix $\mathbf{A}$.

Elementare Umformungen einer Matrix

Elementare Umformungen einer Matrix

Der *Rang* r einer Matrix $\mathbf{A}$ ändert sich *nicht*, wenn sie den folgenden *elementaren Umformungen* unterworfen wird:

1. Zwei Zeilen (oder Spalten) werden miteinander *vertauscht*.
2. Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl *multipliziert* oder durch eine solche Zahl *dividiert*.
3. Zu einer Zeile (oder Spalte) wird ein beliebiges *Vielfaches* einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert.

Rangbestimmung einer Matrix mit Hilfe elementarer Umformungen

Der *Rang* $\mathrm{Rg}(\mathbf{A})$ einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ kann auch wie folgt bestimmt werden. Die Matrix wird zunächst mit Hilfe *elementarer Umformungen* auf die folgende sog. *Trapezform* gebracht:

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} \\
0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

$(b_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, ..., r)$.
Der *Rang* von $\mathbf{A}$ ist dann gleich der *Anzahl* r der *nicht-verschwindenden* Zeilen: $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = r$.

Beispiel

Wir bestimmen den *Rang* der $(3,4)$-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix}$$

indem wir die Matrix $\mathbf{A}$ der Reihe nach den folgenden *elementaren Umformungen* unterwerfen (die jeweils durchgeführte Umformung schreiben wir in die betreffende Zeile; Z: Zeile):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ +Z_1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -3Z_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{“Nullzeile”} \end{array}$$

Die Matrix hat jetzt die gewünschte *Trapezform*.

Ihr *Rang* beträgt somit $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = 2$.