Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I+II
Frühlingsemester 2019
Kap. 9: Funktionen mehrerer Variablen
9.1 Einführung

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

9. Funktionen mehrerer Variablen: 1. Einführung

- Definition einer Funktion mehrerer Variablen
- Darstellungsformen einer Funktion
  - Analytische Darstellung
  - Graphische Darstellung

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 194 – 209**,
  Seiten 332 – 338 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

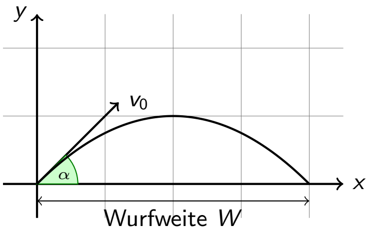
Definition einer Funktion mehrerer Variablen

Beispiel

- **Wurfparabel beim schiefen Wurf**
  Betrachte die *Wurfparabel* eines Körpers, der mit der Geschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α gegen die Horizontale geworfen wurde.
  Die Wurfweite W hängt dabei nicht nur von der Wurfgeschwindigkeit v_0 sondern auch noch vom Abwurfwinkel α ab.
  Es besteht der funktionale Zusammenhang

$$W = W(v_0, \alpha) = \frac{2v_0^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{g}$$

  W ist somit eine *Funktion* von v_0 und α.



Definition einer Funktion mehrerer Variablen

Definition

Gegeben zwei Mengen D und W versteht man unter einer *Funktion von zwei unabhängigen Variablen* eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x; y)$ aus der Menge D genau ein Element z aus der Menge W zuordnet.
Symbolische Schreibweise:

$$z = f(x; y)$$

Wir führen noch folgende, allgemein übliche Bezeichnungen ein:

- x, y: *Unabhängige Variable* oder *unabhängige Veränderliche*
- z: *Abhängige Variable* oder *abhängige Veränderliche*
- f: *Funktionszeichen* (Funktionssymbol)
- D: *Definitionsbereich* der Funktion
- W: *Wertebereich* oder *Wertevorrat* der Funktion

Definition einer Funktion mehrerer Variablen

Anmerkungen

- x,y und z sind *reelle* Variablen.
- Der *Definitionsbereich* D einer Funktion $z = f(x;y)$ kann als eine im allgemeinen *flächenhafte* Punktmenge der xy-Ebene aufgefasst werden.

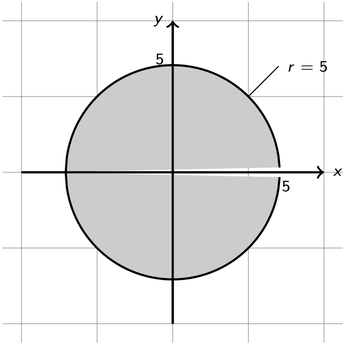
Beispiele

- $z = f(x;y) = 2x + y + 5$
  Definitionsbereich $D : x, y \in \mathbb{R}$ (xy-Ebene)
  Wertebereich $W : z \in \mathbb{R}$
- $z = f(x;y) = x^2 + y^2$
  Definitionsbereich $D : x, y \in \mathbb{R}$ (xy-Ebene)
  Wertebereich $W : z \geq 0$ (nur *positive* Funktionswerte)

Definition einer Funktion mehrerer Variablen

Beispiel

- $z = f(x; y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
  Definitionsbereich $D : 25 - x^2 - y^2 \geq 0$, d.h $(x^2 + y^2 \leq 25)$
  Wertebereich $W : 0 \leq z \leq 5$



Definitionsbereich der Funktion $z = f(x; y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Definition einer Funktion mehrerer Variablen

Analog gelangt man zu Funktionen von *mehr als zwei* unabhängigen Variablen. Bei Funktionen *dreier* unabhängiger Variablen werden diese meist der Reihe nach mit x, y, z und die abhängige Variable mit u bezeichnet.
Wir verwenden dann die *symbolische Schreibweise*

$$u = f(x; y; z) \quad \text{oder} \quad u = u(x; y; z).$$

Eine Funktion von n unabhängigen Variablen kennzeichnen wir durch das *Symbol*

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) \quad \text{oder} \quad y = y(x_1; x_2; \ldots; x_n).$$

Die indizierten Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind dabei die *unabhängigen* Variablen, y die *abhängige* Variable, auch Funktionswert genannt.

Beispiel

- $u = f(x; y; z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$
  Definitionsbereich $D : x, y, z \in \mathbb{R}$
  Wertebereich $W : u \geq 0$

Analytische Darstellung

In der *analytischen* Darstellungsform liegt die Funktion in Form einer *Gleichung* (hier auch *Funktionsgleichung* genannt) vor.
Dabei wird noch zwischen der *expliziten* und der *impliziten* Form unterschieden:

$z = f(x; y)$:	*Explizite* Darstellung (die Funktion ist nach *einer* Variablen - hier z - aufgelöst)
$F(x; y; z) = 0$:	*Implizite* Darstellung (die Funktion ist nicht nach *einer* der drei Variablen aufgelöst).

Beispiele

- *Explizit* dargestellt sind die folgenden Funktionen:

$$z = 2x + y + 1, \;\; z = x^2 + y^2, \;\; z = \sin(x - y)$$

- Die folgenden Funktionen liegen in *impliziter* Form vor:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \;\; 2x - 8y + 5z + 3 = 0$$

Darstellung durch eine Funktionstabelle (Funktionstafel)

Setzt man in die (als bekannt vorausgesetzte) Funktionsgleichung $z = f(x; y)$ für die beiden *unabhängigen* Variablen x und y der Reihe nach bestimmte Werte ein, so erhält man eine *Funktionstabelle* oder Funktionstafel der folgenden allgemeinen Form:

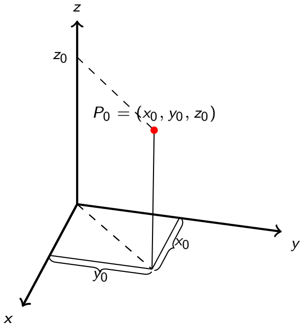
	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_n
x_1	z_{11}	z_{12}	$\cdots$	z_{1k}	$\cdots$	z_{1n}
x_2	z_{21}	z_{22}	$\cdots$	z_{2k}	$\cdots$	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	z_{i1}	z_{i2}	$\cdots$	z_{ik}	$\cdots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	z_{m1}	z_{m2}	$\cdots$	z_{mk}	$\cdots$	z_{mn}

Sie enthält genau $m \cdot n$ Funktionswerte in m Zeilen und n Spalten.
Die Funktionstabelle besitzt somit die *Struktur* einer *Matrix* vom Typ (m, n).

Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

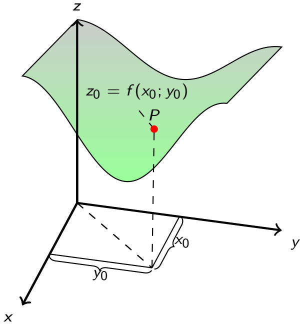
Geometrische Darstellung einer Funktion $z = f(x; y)$ als Fläche im Raum

Eine Funktion $z = f(x; y)$ von zwei unabhängigen Variablen kann in einem drei-dimensionalen kartesischen Raum durch eine über dem Definitionsbereich D liegende *Fläche* dargestellt werden. Der Funktionswert z besitzt dabei die geometrische Bedeutung einer *Höhenkoordinate*.



Kartesische Koordinaten eines Raumpunktes

Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

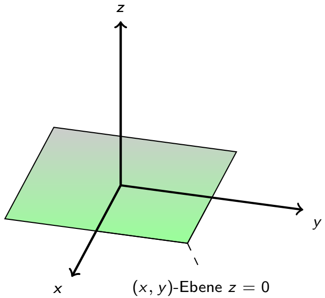


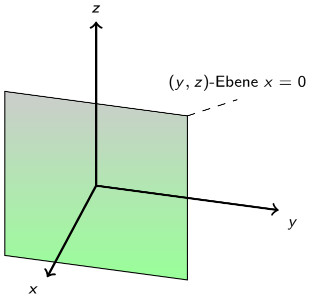
Geometrische Darstellung einer Funktion $z = f(x; y)$ als Fläche im Raum

Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

Ebenen in Raum

- Das geometrische Bild einer *linearen* Funktion vom Typ $ax + by + cz + d = 0$ ist eine *Ebene*.





Parallelebenen

- $z = const = a$ ist die Funktionsgleichung einer Ebene, die im Abstand $d = |a|$ *parallel* zur xy-Ebene $z = 0$ verläuft.
  Für $a > 0$ liegt die Ebene *oberhalb*, für $a < 0$ *unterhalb* der xy-Ebene.

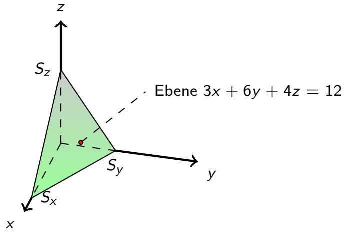
Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

Ebenen in allgemeiner Lage

Die *räumliche* Lage einer Ebene mit der allgemeinen Funktionsgleichung $ax + by + cz + d = 0$ lässt sich aus ihren Schnittpunkten $S_x = (x; 0; 0)$, $S_y = (0; y; 0)$ und $S_z = (0; 0; z)$ mit den drei Koordinatenachsen bestimmen. Eine Ebene ist bekanntlich durch 3 Punkte eindeutig festgelegt.

So erhalten wir beispielsweise für die Ebene $3x + 6y + 4z = 12$ die folgenden drei Achsenschnittpunkte:

$$\begin{array}{llcl} S_x: & 3x + 6\cdot 0 + 4\cdot 0 = 12 & \Rightarrow & x = 4, \text{ d.h. } S_x = (4; 0; 0) \\ S_y: & 3\cdot 0 + 6y + 4\cdot 0 = 12 & \Rightarrow & y = 2, \text{ d.h. } S_y = (0; 2; 0) \\ S_z: & 3\cdot 0 + 6\cdot 0 + 4z = 12 & \Rightarrow & z = 3, \text{ d.h. } S_z = (0; 0; 3) \end{array}$$



Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

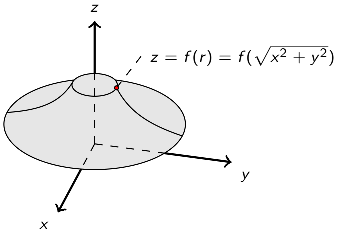
Rotationsflächen Die Funktionsgleichung einer zur z-Achse *rotationssymmetrischen* Fläche besitzt die allgemeine Form

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Eine solche *Rotationsfläche* ensteht durch Drehung der Kurve $z = f(x)$ um die z-Achse. Dabei bewegt sich der Kurvenpunkt $(x; z)$ mit $z = f(x)$ auf einer *Kreisbahn* um die z-Achse.
Die x-Koordinate wird zum Radius r des beschriebenen Kreises, der im räumlichen xyz-Koordinatensystem durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = f(r) = const.$$

beschrieben werden kann.



Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

Höhenliniendiagramm einer Funktion $z = f(x; y)$

DIe *Höhenlinien* einer Funktion $z = f(x; y)$ genügen der impliziten Kurvengleichung

$$f(x; y) = c.$$

c: Wert der Höhenkoordinate z (Kurvenparameter)

Anmerkungen

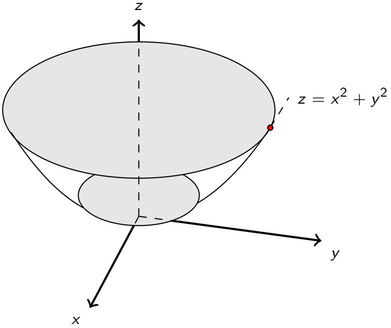
- Die durch Gleichung definierten *Höhenlinien* repräsentieren eine *einparametrige* Kurvenschar mit der Höhenkoordinate $z = c$ als *Parameter*.
  Zu jedem (zulässigen) Parameterwert gehört dabei genau eine Höhenlinie.
- Die Höhenlinien sind die Projektionen der *Linien gleicher Höhe* in die (x, y)-Koordinatenebene.

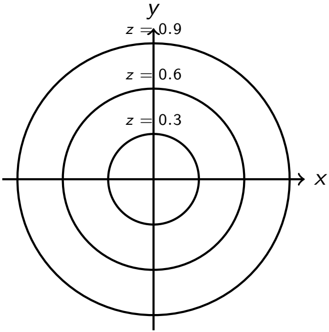
Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

Beispiel

Die *Höhenlinien* der Rotationsfläche $z = x^2 + y^2$ genügen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = const = c$$





Schnitt der Fläche $z = x^2 + y^2$ mit der Parallelebene $z = c$ und Höhenliniendiagramm der Funktion (Fläche) $z = x^2 + y^2$

Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

Schnittkurvendiagramme einer Funktion $z = f(x; y)$

Die folgenden *Schnittkurvendiagramme* der Funktion $z = f(x; y)$ ergeben sich durch Schnitte der zugehörigen Bildfläche mit Ebenen *parallel* zu einer der drei Koordinatenebenen:

- *Schnitte parallel zur xy-Ebene* (Schnittebenen: $z = const = c$):

  $$f(x; y) = const = c$$

  (*Höhenliniendiagramm*)

- *Schnitte parallel zur yz-Ebene* (Schnittebenen: $x = const = c$):

  $$z = f(x = c; y)$$

- *Schnitte parallel zur xz-Ebene* (Schnittebenen: $y = const = c$):

  $$z = f(x; y = c)$$

Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

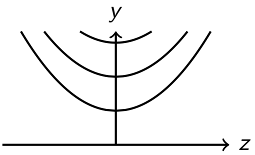
Anmerkung

- In den physikalisch-technischen Anwendungen wird das Schnittliniendiagramm einer Funktion meist als *Kennlinienfeld* bezeichnet.

Beispiel

- Wir bestimmen nun die Schnittkurven der Fläche $z = x^2 + y^2$ mit Ebenen, die *parallel* zur yz-Ebene verlaufen $(x = c)$. Sie genügen der Gleichung

$$z = c^2 + y^2.$$



Schnittkurvendiagramm der Fläche $z = x^2 + y^2$ (Schnitte parallel zur yz-Ebene)