Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Mathematik II
# Frühlingsemester 2019
# Kap. 9: Funktionen mehrerer Variablen
# 9.3 Anwendungen (Teil 1): Kettenregel und Linearisierung

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

9. Funktionen mehrerer Variablen: 3. Anwendungen (Teil 1)

- Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern
- Implizite Differentiation
- Linearisierung einer Funktion

## Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 232 – 245**,
  **Seiten 332 – 338 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)**

# Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

## Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

$z = f(x; y)$ sei eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen $x$ und $y$, diese wiederum von *zwei* Parametern $u$ und $v$ abhängig:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v) \qquad (u_1 \leq u \leq u_2;\ v_1 \leq v \leq v_2).$$

Dann ist die durch Einsetzen dieser beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung $z = f(x; y)$ erhaltene Funktion

$$z = f(x(u; v); y(u; v)) = F(u; v)$$

eine *zusammengesetzte, verkettete* oder *mittelbare* Funktion dieser Parameter, deren partielle Ableitungen 1. Ordnung nach der folgenden *Kettenregel* gebildet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

# Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

## Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

*Bezeichnungen:*

| | | |
|---|---|---|
| $z = f(x; y)$ | : | *Äussere* Funktion |
| $x = x(u; v), y = y(u; v)$ | : | *Innere* Funktionen |

### Anmerkungen

- Auch die folgende Kurzschreibweise für die *Kettenregel* ist üblich:

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$
$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

Wir können die in der Kettenregel auftretenden Ableitungen wiederum wie folgt zu *Ableitungsvektoren* zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}: \textit{ Äussere Ableitung}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}: \textit{ Innere Ableitungen}$$

Die gesuchte partielle Ableitung ist dann das *skalare Produkt* aus der *äusseren* und der (entsprechenden) *inneren* Ableitung.

# Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

## Beispiel

- $z = f(x; y) = e^x \cdot cos(x - y)$ mit $x = x(u; v) = u + v^2$,
  $y = y(u; v) = u - v^2$.
  Wir interessieren uns für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= e^x \cdot \cos(x - y) - e^x \cdot \sin(x - y) = e^x[\cos(x - y) - \sin(x - y)] \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= e^x \cdot \sin(x - y) \\
\frac{\partial x}{\partial u} &= 1,\ \frac{\partial x}{\partial v} = 2v \\
\frac{\partial y}{\partial u} &= 1,\ \frac{\partial y}{\partial v} = -2v
\end{aligned}
$$

# Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

- Für die gesuchten partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$ erhalten wir dann mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\
&= e^x[\cos(x-y) - \sin(x-y)] \cdot 1 + e^x \cdot \sin(x-y) \cdot 1 \\
&= e^x \cos(x-y) \\
&= e^{u+v^2} \cos(2v^2) \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\
&= e^x[\cos(x-y) - \sin(x-y)] \cdot 2v + e^x \cdot \sin(x-y) \cdot (-2v) \\
&= 2v \cdot e^x[\cos(x-y) - 2\sin(x-y)] \\
&= 2v \cdot e^{u+v^2}[\cos(2v^2) - 2\sin(2v^2)]
\end{aligned}$$

# Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

- Wir gelangen zum gleichen Ergebnis, wenn wir zunächst die Parametergleichungen in die gegebene Funktion einsetzen und diese dann nach dem *Parameter* $u$ bzw. $v$ partiell differenzieren:

$$\begin{aligned}
z &= e^x \cdot cos(x-y) = e^{u+v^2} cos(2v^2) = F(u;v) \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= e^{u+v^2} cos(2v^2) \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= 2v \cdot e^{u+v^2} \cos(2v^2) + e^{u+v^2} \cdot (-4v) \sin(2v^2) \\
&= 2v \cdot e^{u+v^2} [\cos(2v^2) - 2\sin(2v^2)]
\end{aligned}$$

# Implizite Differentiation

Wir gehen von einer in *impliziter* Form $F(x;y)=0$ gegebener Funktion aus und fassen die durch diese Gleichung definierte Kurve als *Schnittlinie* der Fläche $z=F(x;y)$ mit der $xy$-Ebene $z=0$ auf. Für die Punkte der *Schnittkurve* ist $z=0$ und somit auch

$$dz = F_x dx + F_y dy = 0.$$

## Implizite Differentiation

Der *Anstieg* einer in impliziter Form $F(x;y)=0$ dargestellten Funktionskurve im Kurvenpunkt $P=(x;y)$ lässt sich mit Hilfe der *partiellen Differentiation* wie folgt bestimmen:

$$y'(P) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)} \qquad (F_y(x;y) \neq 0)$$

Dabei bedeuten:

$$\left.\begin{array}{l} F_x(x;y) \\ F_y(x;y) \end{array}\right\} \text{Partielle Ableitungen 1. Ordnung von } z = F(x;y)$$

# Implizite Differentiation

## Beispiel

- Welche *Steigung* besitzt die Kurve mit der Gleichung

$$(x^2+y^2)^2-2x(x^2+y^2)-y^2=0$$

im Kurvenpunkt $P=(0;1)$?

- *Lösung:*

$$\begin{aligned}
F_x(x;y) &= 4x(x^2+y^2)-6x^2-2y^2 \\
F_y(x;y) &= 4y(x^2+y^2)-4xy-2y \\
y'(P) &= -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)} \\
&= -\frac{2x(x^2+y^2)-3x^2-y^2}{2y(x^2+y^2)-2xy-y}
\end{aligned}$$

Speziell im Punkt $P=(0;1)$ gilt dann:

$$y'(P)=y'(x=0;y=1)=1$$

# Linearisierung einer Funktion

## Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung eines Flächenpunktes (Arbeitspunkt) $P = (x_0; y_0; z_0)$ kann die *nichtlineare* Funktion $z = f(x; y)$ *näherungsweise* durch die lineare Funktion (Tangentialebene)

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0)$$

oder

$$\Delta z = f_x(x_0; y_0)\Delta x + f_y(x_0; y_0)\Delta y$$

ersetzt werden.

Dabei bedeuten:

$\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$: *Abweichungen* eines beliebigen Flächenpunktes gegenüber dem Arbeitspunkt $P$.

# Linearisierung einer Funktion

## Anmerkung

- Auch eine Funktion von $n$ unabhängigen Variablen lässt sich *linearisieren*. In der unmittelbaren Umgebung des Arbeitpunktes $P$ kann die Funktion $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ näherungsweise durch das *totale Differential* ersetzt werden:

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n$$

Die partiellen Ableitungen beziehen sich dabei wiederum auf den *Arbeitspunkt $P$*, gekennzeichnet durch den Index "0".

# Linearisierung einer Funktion

## Beispiel

- Wir *linearisieren* die Funktion $z = f(x;y) = 5x^2 \cdot \sqrt{y}$ in der unmittelbaren Umgebung des Punktes P=(2;1;20).

$$\Delta z = f_x(2;1)\Delta x + f_y(2;1)\Delta y$$

Wir berechnen die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung:*

$$f_x(2;1) = 10x \cdot \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad f_x(2;1) = 20$$
$$f_y(2;1) = \frac{5x^2}{2\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad f_y(2;1) = 10$$

Die *lineare Näherungsfunktion* lautet somit:

$$\Delta z = 20\Delta x + 10\Delta y$$

oder, mit $\Delta x = x - 2$, $\Delta y = y - 1$, und $\Delta z = z - 20$:

$$z = 20x + 10y - 30$$