Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik II
Frühlingsemester 2019
Kap. 9: Funktionen mehrerer Variablen
9.4 Anwendungen (Teil 2): Extremwerte

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

9. Funktionen mehrerer Variablen: 4. Anwendungen (Teil 2)

- Relative oder lokale Extremwerte
- Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen
- Lineare Fehlerfortpflanzug

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 245 – 260**,
  Seiten 332 – 338 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Relative oder lokale Extremwerte

Definition

Eine Funktion $z = f(x; y)$ besitzt an der Stelle $(x_0; y_0)$ ein *relatives Maximum* (bzw. *relatives Minimum*), wenn eine Umgebung von $(x_0; y_0)$ existiert, sodass

$$f(x_0; y_0) \geq f(x; y) \quad (\text{bzw.} \quad f(x_0; y_0) \leq f(x; y))$$

für alle (x, y) in dieser Umgebung gilt.

Anmerkungen

- Die *relativen Maxima* und *Minima* einer Funktion werden unter dem Sammelbegriff "Relative Extremwerte" zusammengefasst. Die den Extremwerten entsprechenden Flächenpunkte heissen *Hoch-* bzw. *Tiefpunkte*.
- Ein *relativer* Extremwert wird auch als *lokaler* Extremwert bezeichnet, da die extreme Lage meist nur in der *unmittelbaren Umgebung* zutrifft.
- Ist die Ungleichung an *jeder* Stelle $(x; y)$ des Definitionsbereiches von $z = f(x; y)$ erfüllt, so liegt ein *absolutes Maximum* bzw. *absolutes Minimum* vor.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiele

- Die *Rotationsfläche* $z = e^{-(x^2+y^2)}$ entsteht aus der *Gauss'schen Glockenkurve* $z = e^{-x^2}$ durch *Drehung* dieser Kurve um die z-Achse. Die *Rotationsfläche* besitzt im Punkt $P = (0; 0; 1)$ einen *Hochpunkt*.

Notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert

In einem *relativen Extremum* $(x_0; y_0)$ der Funktion $z = f(x; y)$ besitzt die zugehörige Bildfläche stets eine zur xy-Ebene *parallele* Tangentialebene. Die Bedingungen

$$f_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0; y_0) = 0$$

sind daher *notwendige* Voraussetzungen für die Existenz eines relativen Extremwertes an der Stelle $(x_0; y_0)$.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiel

- Mit der Funktionsgleichung $z = f(x; y) = x^2 - y^2$ sind die *notwendingen* Bedingungen an der Stelle $(0; 0)$ für ein relatives Extremum erfüllt:

$$\begin{aligned} f_x(x; y) &= 2x \quad \Rightarrow \quad f_x(0; 0) = 0 \\ f_y(x; y) &= -2y \quad \Rightarrow \quad f_y(0; 0) = 0 \end{aligned}$$

  Trotzdem besitzt die Funktion $z = f(x; y) = x^2 - y^2$ keinen Extremwert.

  Begründung: Der Schnitt der Fläche mit der xz-Ebene ($y = 0$) ergibt die nach oben geöffnete Normalparabel $z = x^2$, die in $(0; 0)$ ihr (absolutes) *Minimum* besitzt.

  Schneidet man die Fläche jedoch mit der yz-Ebene ($x = 0$), so erhält man die nach *unten* geöffnete Normalparabel $z = -y^2$, die in $(0; 0)$ ihr (absolutes) Maximum annimmt.

  Der Flächenpunkt $P = (0; 0; 0)$ kann daher kein Extremum sein. Es handelt sich vielmehr um einen sogenannten *Sattelpunkt*.

Relative oder lokale Extremwerte

Hinreichende Bedingungen für einen relativen Extremwert

Eine Funktion $z = f(x; y)$ besitzt an der Stelle $(x_0; y_0)$ mit *Sicherheit* einen *relativen Extremwert*, wenn folgende Bedingungen beide erfüllt sind:

1. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung *verschwinden* in $(x_0; y_0)$:
$$f_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0; y_0) = 0$$
2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung genügen der Ungleichung
$$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - f_{xy}^2(x_0; y_0) > 0.$$

Ist ferner $f_{xx}(x_0; y_0) < 0$ so liegt ein *relatives Maximum* vor, für $f_{xx}(x_0; y_0) > 0$ dagegen ein *relatives Minimum*.

Relative oder lokale Extremwerte

Anmerkungen

- Die Diskriminante Δ kann auch als *zweireihige Determinante* geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}$$

- In den Fällen, wo die partiellen Ableitungen 1. Ordnung in $(x_0; y_0)$ *verschwinden*, d.h. $f_x(x_0; y_0) = 0$ und $f_y(x_0; y_0) = 0$, und weiter die Diskriminante $\Delta < 0$ oder $\Delta = 0$ erfüllt, gilt:

  $\Delta < 0$: Es liegt *kein Extremwert*, sondern ein *Sattelpunkt* vor.

  $\Delta = 0$: Das Kriterium ermöglicht in diesem Fall *keine* Entscheidung darüber, ob an der Stelle $(x_0; y_0)$ ein relativer Extremwert vorliegt oder nicht.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiel

- Wir zeigen dass die Rotationfläche mit der Funktionsgleichung $z = f(x; y) = e^{-(x^2+y^2)}$ an der Stelle $(0; 0)$ ein lokales (sogar absolutes) Maximum annimmt.

  Dazu benötigen wir die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
f_x(x; y) &= -2x \cdot e^{-(x^2+y^2)} \\
f_y(x; y) &= -2y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{xx}(x; y) &= (4x^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{xy}(x; y) &= 4xy \cdot e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{yy}(x; y) &= (4y^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

Relative oder lokale Extremwerte

- Sie besitzen an der Stelle $(0;0)$ die folgenden Werte:

$$f_x(0;0) = 0, \quad f_y(0;0) = 0,$$

damit sind die *notwendigen* Bedingungen für einen relativen Extremwert erfüllt, und weiter

$$f_{xx}(0;0) = -2, \quad f_{xy}(0;0) = 0, \quad f_{yy}(0;0) = -2$$

Wegen

$$\Delta = f_{xx}(0;0) \cdot f_{yy}(0;0) - f_{xy}^2(0;0) = 4 > 0$$

ist auch das *hinreichende* Kriterium erfüllt.

Da ferner $f_{xx}(0;0) < 0$ ist, liegt an der Stelle $(0;0)$ ein *relatives Maximum* vor: $f(0;0) = 1$.

An allen übrigen Stellen ist $f(x;y) < 1$, so dass der Flächenpunkt $P = (0;0;1)$ sogar das *absolute Maximum* auf der Fläche darstellt.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiel

- Wir bestimmen die *relativen Extremwerte* der Funktion $z = f(x;y) = 3xy - x^3 - y^3$.

  Die dabei benötigten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung lauten:

  $$f_x(x;y) = 3y - 3x^2, \quad f_y(x;y) = 3x - 3y^2$$
  $$f_{xx}(x;y) = -6x, \quad f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = 3, \quad f_{yy}(x;y) = -6y$$

  Die *notwendigen* Bedingungen $f_x(x;y) = 0$ und $f_y(x;y) = 0$ führen zum *nicht-linearen* Gleichungssystem

  $$\left.\begin{array}{l} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{d.h} \quad \left\}\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = x^4 \end{array}\right.$$

  mit *zwei* reellen Lösungen $(x_1;y_1) = (0;0)$ und $(x_2;y_2) = (1;1)$.

- Wir prüfen jetzt anhand der Diskriminante Δ, ob auch das *hinreichende* Kriterium zutrifft:
  - **Stelle** $(x_1; y_1) = (0; 0)$

$$f_{xx}(0;0) = f_{yy}(0;0) = 0, \quad f_{xy}(0;0) = 3$$

$$\Delta = -9 < 0 \Rightarrow \text{ Kein Extremwert, sondern Sattelpunkt}$$

  - **Stelle** $(x_2; y_2) = (1; 1)$

$$f_{xx}(1;1) = f_{yy}(1;1) = -6, \quad f_{xy}(1;1) = 3$$

$$\Delta = 27 > 0 \text{ und } f_{xx}(1;1) < 0 \Rightarrow \text{ Relatives Maximum}$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen: 1. Schritt

Lagrange'sches Multiplikatorverfahren

Die *Extremwerte* einer Funktion $z = f(x; y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer *Neben*- oder *Kopplungsbedingung* $\phi(x; y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mithilfe des *Lagrange'schen Multiplikatorverfahrens* schrittweise wie folgt bestimmen:

- Aus der Funktionsgleichung $z = f(x; y)$ und der Nebenbedingung $\phi(x; y) = 0$ wird zunächst die "Hilfsfunktion"

  $$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot \phi(x; y)$$

  gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heisst *Lagrange'scher Multiplikator*.

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen: 2. Schritt

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

- Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich *Null* gesetzt:

$$\left.\begin{array}{l} F_x(x;y;\lambda) = f_x(x;y) + \lambda \cdot \phi_x(x;y) = 0 \\ F_y(x;y;\lambda) = f_y(x;y) + \lambda \cdot \phi_y(x;y) = 0 \\ F_\lambda(x;y;\lambda) = \phi(x;y) = 0 \end{array}\right\}$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten *Extremwerte* sowie der *Lagrange'sche Multiplikator* λ bestimmen.

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Anmerkung

- Das *Lagrange'sche Multiplikatorverfahren* lässt sich auch auf Funktionen von n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit m Nebenbedingungen übertragen ($m < n$):

  Funktion: $\quad z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$

  Nebenbedingungen: $\quad \phi_i(x_1; x_2; \ldots; x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

  Man bildet zunächst die "Hilfsfunktion"

  $$F(x_1; x_2; \ldots; x_n; \lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n) = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

  und setzt dann die $(n + m)$ partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Funktion der Reihe nach gleich *Null:*

  $$\begin{aligned} F_{x_1} &= 0, \quad F_{x_2} = 0, \quad \ldots, \quad F_{x_n} = 0 \\ F_{\lambda_1} &= 0, \quad F_{\lambda_2} = 0, \quad \ldots, \quad F_{\lambda_m} = 0 \end{aligned}$$

  Aus diesen $(n + m)$ Gleichungen lassen sich dann die $(n + m)$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ bestimmen.

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Beispiel

- Wir kehren zu dem anfänglichen Beispiel des *Widerstandsmoments* eines Balkens der Breite b und Dicke h zurück. Mit der Funktion

$$W = W(b; h) = \frac{1}{6} bh^2$$

und der *Nebenbedingung*

$$\phi = \phi(b; h) = b^2 + h^2 - 4R^2 = 0$$

bilden wir zunächst die "Hilfsfunktion"

$$F(b; h; \lambda) = W(b; h) + \lambda \cdot \phi(b; h) = \frac{1}{6} bh^2 + \lambda \cdot (b^2 + h^2 - 4R^2).$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

- Daraus erhalten wir durch partielles Differenzieren und gleich Null Setzen die folgenden Gleichungen für die Balkenbreite b, die Balkendicke h und den *Lagrange'schen Multiplikator* λ:

$$\begin{aligned} F_b(b;h;\lambda) &= \frac{1}{6}h^2 + 2\lambda b = 0 \\ F_h(b;h;\lambda) &= \frac{1}{3}bh + 2\lambda h = 0 \\ F_\lambda(b;h;\lambda) &= b^2 + h^2 - 4R^2 = 0 \end{aligned}$$

  Die *mittlere* Gleichung lösen wir nach λ auf, erhalten $\lambda = -b/6$ und setzen diesen Wert dann in die *erste* Gleichung ein:

$$\frac{1}{6}h^2 - 2\cdot\frac{b}{6}b = 0 \Rightarrow h^2 = 2b^2 \quad (h = \sqrt{2}b)$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

- Dann erhalten wir aus der dritten Gleichung:

$$b^2 + h^2 - 4R^2 = 0 \Rightarrow b_{1/2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

Aus geometrischen Gründen kommt aber nur der *positive* Wert in Frage, der im Gültigkeitsbereich $0 < b < 2R$ liegt.

Die *Lösung* der gestellten Extremwertaufgabe lautet daher:

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{\sqrt{3}} R \\ h &= \sqrt{2} b \\ W_{max} &= \frac{1}{6} b h^2 = \frac{8}{9\sqrt{3}} R^3 \end{aligned}$$

Direkte Messung einer Grösse

Auswertung einer Messreihe

Das *Ergebnis* einer aus n Messwerten bestehenden Messreihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird in der Form $x = \overline{x} \pm \Delta x$ angegeben. Dabei bedeuten:

- $\overline{x}$: *Arithmetischer Mittelwert der n Messwerte*

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Δx: *Messunsicherheit* (hier gleichgesetzt mit der *Standardabweichung* $s_{\overline{x}}$ des Mittelwertes)

$$\Delta x = s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

Direkte Messung einer Grösse

Beispiel

- Eine *wiederholte* Kapazitätsmessung ergibt die folgenden Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
C_i	$50,5\,\mu F$	$50,9\,\mu F$	$50,1\,\mu F$	$51,8\,\mu F$	$49,7\,\mu F$	$50,3\,\mu F$

Arithmetischer Mittelwert:

$$\overline{C} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} C_i = 50,55\,\mu F$$

Direkte Messung einer Grösse

- *Standardabweichung des Mittelwertes:*

$$
\begin{aligned}
s_{\overline{C}} &= \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 6} \sum_{i=1}^{6} (C_i - \overline{C})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 2,6750\,\mu F} \\
&= 0,30\,\mu F
\end{aligned}
$$

Messunsicherheit:

$$\Delta C = s_{\overline{C}} = 0,30\,\mu F$$

Messergebnis:

$$C = \overline{C} \pm \Delta C = (50,55 \pm 0,30)\,\mu F$$