# Clicker Fragen

---

### Frage 1

Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, so gilt

- ◯ Arg(z) $= \frac{3\pi}{4}$
- $\surd$ ◯ Arg(z) $= -\frac{3\pi}{4}$

Die Polarform einer komplexen Zahl ist definiert durch $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, dabei ist $r \in \mathbb{R}$ der Betrag eindeutig definiert und $\phi \in \mathbb{R}$ das Argument nur definiert modulo $2\pi$. Der Hauptwert einer komplexen Zahl ist die Räpresentant des Arguments im Intervall $(-\pi, \pi]$. Die Zahl in der Aufgabe ist aber noch nicht in Polarform geschrieben, es gilt aber

$$z = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

da die Kosinusfunktion gerade ist (d.h. $\cos(-z) = \cos z$) und die Sinusfunktion ungerade ist (d.h. $\sin(-z) = -\sin z$). In dieser Form können wir das Argument direkt ablesen, arg(z) $= -\frac{3\pi}{4} + \mathrm{k}\cdot 2\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$ und der Hauptwert des Arguments ist somit $-\frac{3\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$.

### Frage 2

Sei $z$ eine komplexe Zahl mit $\mathrm{Re}(z) > 0$. Welche der folgenden Zahlen haben dann ebenfalls einen positiven Realteil?

- $\surd$ ◯ $\bar{z}$
- $\surd$ ◯ $\frac{1}{z}$
- ◯ $-\frac{1}{z}$
- $\surd$ ◯ $\frac{1}{\bar{z}}$

Sei $z = x + iy$ mit $x > 0$, so gilt i) $\bar{z} = x - iy$ also $\mathrm{Re}(\bar{z}) = x > 0$, ii) $\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ also $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} > 0$ aber iii) $\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2} < 0$ und iv) $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$ also $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} > 0$ add a picture!!

**Frage 3**

Ist die komplexe Funktion $f(z) = \bar{z}$ komplex differenzierbar an der Stelle $z_0 = 0$?

◯ Ja

$\surd$ ◯ Nein

Wir schreiben $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$. Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

und somit sind die Cauchy-Riemann Gleichungen nicht erfüllt an der Stelle $z_0 = 0$ und somit ist die Funktion nicht komplex differenzierbar an dieser Stelle.

**Frage 4**

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $|f(z)| = c \neq 0 \quad \forall z \in U$ so ist $f$ selber konstant.

$\surd$ ◯ wahr

◯ falsch

Da $|f(z)|^2 = c^2$ gilt $\overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}$ und da $f(z) \neq 0$ und holomorph, so ist auch $\overline{f(z)}$ holomorph. Wir haben aber in Korrolar 3 in §6 gelernt, dass wenn eine Funktion und ihre Konjugierte holomorph sind, die Funktion konstant sein muss.

**Frage 5**

$$\forall z \in \mathbb{C} : z^2 - \bar{z}^2 = 4\mathrm{Re}z \cdot \mathrm{Im}z$$

◯ wahr

$\surd$ ◯ falsch

Dies kann man einfach nachrechnen:

$z^2 - \bar{z}^2 = (x + iy)^2 - (x - iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2) - (x^2 - 2ixy - y^2) = 4ixy = 4\mathrm{Re}z \cdot \mathrm{Im}z$

### Frage 6

$$\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$$

◯ wahr

√ ◯ falsch

Auch dies kann man einfach nachrechnen, aber wird trotzdem oft falsch gemacht:

$$\frac{1}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(x + iy - (x - iy)) = iy = i\,\mathrm{Im} z$$

Bitte nicht vergessen, dass der Imaginärteil einer komplexen Zahl reell ist, oder in Formeln $\mathrm{Im} z \in \mathbb{R}$ weil es die Zahl ist, die nach dem $i$ steht!

### Frage 7

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. So ist $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) := f(\bar{z})$ auch holomorph.

◯ wahr

√ ◯ falsch

Sei $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ so ist

$$g(z) = f(x - iy) = u(x, -y) + iv(x, -y) =: \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$$

Und somit lautet die erste Cauchy-Riemann Gleichung für $g$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(x, y)$$

was mit Hilfe der Kettenregel äquivalent ist zu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \tag{1}$$

Da aber $f$ aber holomorph ist und somit die CR-Gleichungen erfüllt so gilt insbesondere die erste CR-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \tag{2}$$

Die beide Gleichungen (1) und (2) bilden offenbar ein Widerspruch.

**Frage 8**

Sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{1+4z^2}$ so ist $f$ holomorph auf $D$.

◯ wahr

√ ◯ falsch

Beachte, dass $f$ nicht definiert ist wenn $z^2 = -\frac{1}{4}$ d.h. wenn $z = \pm\frac{i}{2}$. Da $\pm\frac{i}{2} \in D$, ist $f$ nicht mal definiert in diesen beiden Punkten und kann somit auch nicht komplex differenzierbar sein. Wir nennen diese beide Punkte **isolierte Singularitäten** von $f$.

**Frage 9**

Betrachte die beide Funkionen $f(z) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ und $g(z) = \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(\bar{z})^2$. So gilt

◯ $f$ und $g$ sind beide komplex-differenzierbar in $z_0 = 0$

◯ $f$ ist komplex-differenzierbar in $z_0 = 0$ aber $g$ nicht

√ ◯ $g$ ist komplex-differenzierbar in $z_0 = 0$ aber $f$ nicht

◯ weder $f$ noch $g$ ist komplex-differenzierbar in $z_0 = 0$

Ausgeschrieben lauten die beide Funktionen $f(x + iy) = x + y$ (d.h. $u_f(x, y) = x + y$ und $v_f(x, y) = 0$) und $g(x + iy) = x^2 - y^2$ (d.h. $u_g(x, y) = x^2 - y^2$ und $v_g(x, y) = 0$) und somit lauten die CR-Gleichungen für $f$ and der Stelle $z_0 = 0$

$$\frac{\partial u_f}{\partial x}(0,0) = 1 \neq \frac{\partial v_f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq -\frac{\partial v_f}{\partial x}(0,0) = 0$$

d.h. beide CR-Gleichungen sind nicht erfüllt und somit ist $f$ nicht komplex-differenzierbar in $z_0 = 0$. Anderseits gilt für $g$

$$\frac{\partial u_g}{\partial x}(0,0) = 2 \cdot 0 = \frac{\partial v_g}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_g}{\partial y}(0,0) = -2 \cdot 0 = -\frac{\partial v_g}{\partial x}(0,0) = 0$$

d.h. die CR-Gleichungen sind an dieser Stelle erfüllt und somit ist $g$ komplex-differenzierbar an der Stelle $z_0$ aber an keine einzige andere Stelle!

**Frage 10**

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = 1$$

◯ wahr

√ ◯ falsch

Ein komplexer Grenzwert existiert wenn man das gleiche Ergebnis erhält egal aus welcher Richtung man den Punkt $z_0$ annähert. Betrachte nun $z = t$ und $z = t + it$, so haben wir einerseits

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\bar{t}}\right)^2 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{t}\right)^2 = 1$$

und anderseits

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t+it}{\overline{t+it}}\right)^2 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t+it}{\overline{t+it}}\cdot\frac{t+it}{t+it}\right)^2 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2+2it^2-t^2}{t^2+t^2}\right)^2 = \lim_{t\to 0}(i)^2 = -1$$

und somit haben wir zwei Richtungen gefunden entlang welche der Grenzwert ein anderes Resultat liefert und somit existiert der Grenzwert nicht.

**Frage 11**

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$eine differenzierbare Kurve so gilt

$$\mathrm{Re}\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \mathrm{Re}f(z)\,dz$$

◯ stimmt

√ ◯ stimmt nicht

Ein Ausdruck der Form $\int_\gamma f(z)\,dz$ ist eine komplexe Zahl und somit ist die rechte Seite der Gleichung $\mathrm{Re}\int_\gamma f(z)\,dz \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die linke Seite kann man aber umformen

$$\int_\gamma \mathrm{Re}f(z)\,dz = \int_\gamma u(z)\,dz = \int_0^1 u(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

und somit ist dies ein komplexes Integral (weil $\gamma'(t)$ komplex ist) d.h. $\int_\gamma \mathrm{Re}f(z)\,dz \in \mathbb{C}$

**Frage 12**

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Kurve so gilt $\int_\gamma |f(z)|\, dz \in \mathbb{R}$

◯ stimmt

√ ◯ stimmt nicht

Die ist genau das gleiche Argument wie in der vorherigen Aufgabe

$$\int_\gamma |f(z)|\, dz = \int_0^1 |f(\gamma(t))| \cdot \gamma'(t)\, dt \in \mathbb{C}$$

weil man hier die komplex-wertige Funktion $|f(\gamma(t))| \cdot \gamma'(t)$ integriert.

**Frage 13**

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Stammfunktion Log(z).

◯ stimmt

√ ◯ stimmt nicht

Beachte, dass eine Stammfunktion differenzierbar sein muss, weil $F'(z) = f(z)$ gelten muss. Nun gilt für Log(z), dass sie nicht mal existiert wenn $z = x$ für $x < 0$ und eine Funktion die nicht existiert, kann natürlich auch nicht differezierbar sein!

**Frage 14**

Das Gebiet $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im(z)} < 0 \vee \mathrm{Im(z)} - 2\mathrm{Re(z)} \neq 0\}$ ist

√ ◯ einfach zusammenhängend

◯ nicht einfach zusammenhängend

Anders ausgedrückt haben wir hier (fast genauso wie in der Serie 5)

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im(z)} < 0 \vee \mathrm{Im(z)} - 2\mathrm{Re(z)} \neq 0\} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im(z)} < 0\} \cup \{\mathrm{z} \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im(z)} - 2\mathrm{Re(z)} \neq 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y = 2x \,\mathrm{und}\, y > 0\}\end{aligned}$$

und dieses Gebiet ist offensichtlich (male ein Bild) zusammenhängend.

**Frage 15**

Da $\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}\,dz = 2\pi i \cdot \sinh(0) = 0$ für jede Kurve $\gamma$ die Null umschliesst und $\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}\,dz = 0$ für jede Kurve $\gamma$ die Null nicht umschliesst, muss gelten $f(z) = \frac{\cosh z}{z^4}$ ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

○ stimmt

√ ○ stimmt nicht

Man sollte hier zwei Sachen klar unterscheiden: Der Satz der Stammfunktion sagt "$f$ hat eine Stammfunktion genau dann wenn jedes Integral entlang einer geschlossenen Kurve Null ergibt" und gilt für zusammenhängende Gebiete. Der Satz von Cauchy sagt "Wenn $f$ holomorph ist auf einer einfachzusammenhängender Menge, so hat $f$ eine Stammfunktion". Hier sind zwar alle Kurvenintegrale Null auf dem Gebiet $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und hat $f$ also eine Stammfunktion auf diesem Gebiet, aber da dieses Gebiet nicht einfachzusammenhängend ist, macht die Aussage kein Sinn und stiftet nur Verwirrung indem es bekannte Begriffe im falschen Kontakt verwendet :-)

**Frage 16**

Sei $f(z) = 9 - 6z + z^2$ mit Nullstelle $z_0 = 3$ so ist dies eine Nullstelle Null-ter Ordnung, weil $c_0 = 9$.

○ stimmt

√ ○ stimmt nicht

Unsere "neue" Definition der Ordnung einer Nullstelle ist; schreibe die Funktion als Taylorreihe um diese Nullstelle, d.h. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, die Ordnung der Nullstelle ist nun das $k$ der ersten nicht verschwindenden Koeffizient $c_k$. Machen wir dies also für unsere Funktion $f(z) = (z-3)^2$ so gilt $c_0 = c_1 = 0$ und $c_2 = 1 \neq 0$ ($c_3$ und die weitere Koeffizienten interessieren uns hier nicht) und damit ist die Ordnung, wie erwartet, 2. Wir müssen also aufpassen mit dieser Definition. Man kann sie erst anwenden wenn die Funktion als Taylorreihe um die Nullstelle entwickelt ist.

**Frage 17**

Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3}$$

habe den Konvergenzradius R. Dann folgt für die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{-n} \tag{4}$$

○ $g(z) = f(\frac{1}{z})$

○ $g(z) = \frac{1}{f(z)}$

○ $g$ hat eine wesentliche Singularität in $z_0$

○ Die Reihe $g$ hat den Konvergenzradius $\frac{1}{R}$

√ ○ Die Reihe $g$ konvergiert für alle $z$ mit $|z - z_0| > \frac{1}{R}$

Dass $f$ als Potenzradius $R$ hat, bedeutet, dass die Reihe (3) konvergiert für alle $\in \mathbb{C}$ für welche gilt $|z - z_0| < R$. Die Reihe (4) kann man umschreiben als

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left( \frac{1}{z - z_0} \right)^n$$

und konvergiert somit wenn $|\frac{1}{z-z_0}| < R$ was äquivalent ist zu $|z - z_0| > \frac{1}{R}$

**Frage 18**

Seien $f, g, : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die in einer Umgebung von $z_0 = 0$ differenzierbar sind und für die $f(0) = g(0) = 0, g'(0) \neq 0$ gilt. Dann gilt

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

√ ○ stimmt

○ stimmt nicht

Dies ist nichts anders als der Satz von l'Hôpital, der auch für komplexe Funktionen gilt.

**Frage 19**

Betrachte die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{mit } c_k = \overline{c_{-k}} \, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist diese Fourierreihe reell.

√ ◯ richtig

◯ falsch

Wir beobachten zuerst, dass $c_0 = \overline{c_{-0}} = \overline{c_0}$ und somit gilt $c_0 \in \mathbb{R}$. Nun schreiben wir die Reihe um

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} &= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} c_{-l} e^{-ilt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \overline{c_l e^{ilt}} + c_0 + \sum_{l=1}^{\infty} c_l e^{ilt} \\
&= c_0 + \sum_{l=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left(c_l e^{ilt}\right) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

**Frage 20**

Betrachte die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \text{ mit } c_k = -c_{-k} \text{ und } ic_k \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist diese Fourierreihe reell.

√ ◯ richtig

◯ falsch

Wir beobachten zuerst, dass $c_0 = -c_{-0} = -c_0$ und somit gilt $c_0 = 0 \in \mathbb{R}$. Nun schreiben wir die Reihe um

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} &= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} c_{-l} e^{-ilt} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} -c_l e^{-ilt} + \sum_{l=1}^{\infty} c_l e^{ilt} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} (-c_l) \cdot (\cos(-lt) + i\sin(-lt) + \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cdot (\cos(lt) + i\sin(lt)) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} (-c_l) \cdot (\cos(lt) - i\sin(lt) + \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cdot (\cos(lt) + i\sin(lt)) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} 2c_l i \sin(lt) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung folgt aus der zweiten Bedingung an die Koeffizienten.