Satz: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ stetig, so sind folgende Aussagen äquivalent

i) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \subseteq \mathcal{U}$

ii) $\exists F: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$

Beweis ii) $\Rightarrow$ i)

Sei $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ eine geschl. Kurve d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$. Dann gilt (da $F' = f$)

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))\,dt$$

$$= F(\gamma(t))\Big|_0^1 = F(\gamma(0)) - F(\gamma(1)) = 0$$

i) $\Rightarrow$ ii)

Wähle $z_0 \in \mathcal{U}$ und definiere $F_{z_0}(z) = \int_\gamma f(\xi)\,d\xi$ mit $\gamma(0) = z_0$, $\gamma_1(z)$.

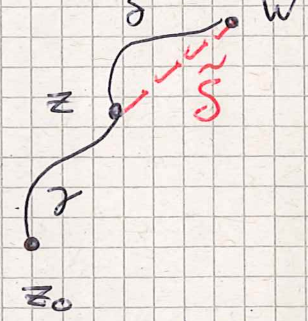
- z.Z. F_{z_0} ist unabhängig von der Wahl von γ, also wähle $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ mit $\tilde{\gamma}(0) = z_0$, $\tilde{\gamma}(1) = z$ dann gilt:

$$0 \overset{i)}{=} \int_{\gamma * (-\tilde{\gamma})} f(\xi)\,d\xi = \int_\gamma f(\xi)\,d\xi - \int_{\tilde{\gamma}} f(\xi)\,d\xi$$

d.h. $\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = \int_{\tilde{\gamma}} f(\xi)\,d\xi$

- z.Z. $F_{z_0}' = f$

$$F_{z_0}'(z) := \lim_{w\to 0} \frac{F_{z_0}(z+w) - F_{z_0}(z)}{w}$$



$$= \lim_{w\to 0} \frac{\int_{\gamma * \delta} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma} f(\xi)d\xi}{w}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\int_{\delta} f(\xi)\,d\xi}{w}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\int_0^1 f(z+sw)\cdot \cancel{w}\,ds}{\cancel{w}}$$

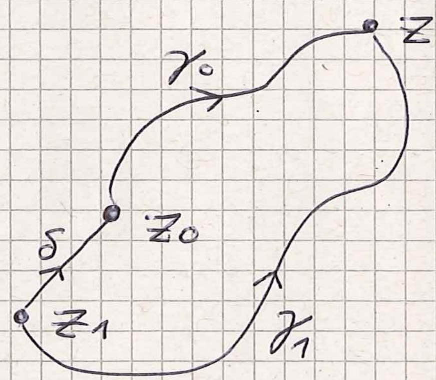
$$= \int_0^1 \lim_{w\to 0} f(z+sw)\,ds$$

$$= \int_0^1 f(z)\,ds = f(z)$$

da $\int_\gamma f(\xi)d\xi = 0$ $\forall$ geschl. γ
$\Rightarrow$ $\int_\delta f(\xi)d\xi$ ist wegunabh.
$\Rightarrow$ wähle $\tilde{\delta}$

q.e.d.

Bem. Hätte man statt $z_0 \in U$ einen anderen Startpkt z.B. $z_1 \in U$ gewählt



So gilt:

$$F_{z_1}(z) = \int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi$$

$$= \int_{\gamma_0 * \delta} f(\xi)d\xi$$

$$= \int_{\gamma_0} f(\xi)\,d\xi + \int_\delta f(\xi)d\xi$$

$$= F_{z_0}(z) + c(z_0, z_1)$$

Also zwei verschiedene Stammfkt unterscheiden sich um eine Konstante (die also nicht von z abhängt).