Übung 2: Logarithmen, Wurzeln & Komplexe Funktionen

Aufgabe 1. (1.a) Berechnen Sie die folgenden Terme in der Normalform.

i) e^{i},

ii) $\mathrm{e}^{1-2\mathrm{i}}$,

iii) $\mathrm{Log}(1+\mathrm{i})$,

(1.b) Berechnen Sie die folgenden Terme approximativ:

i) $\cos(10\mathrm{i})$,

ii) $\sin(5+5\mathrm{i})$,

iii) $\sin(2-\mathrm{i})$.

Aufgabe 2. (2.a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{|n|\to\infty} \cos(in)$,

ii) $\lim_{n\to\infty} 1+(-1)^n \frac{\mathrm{i}}{n}$,

iii) $\lim_{n\to\infty} (n+2\pi\mathrm{i})^n/n^n$,

iv) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Arg}(1+(-1)^n \frac{\mathrm{i}}{n})$,

wobei in der letzten Teilaufgabe der Hauptwert des Arguments gemeint ist.

(2.b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{(\pi\mathrm{i})^n}{n!}.$$

Aufgabe 3. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$$

gilt, für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Benutzen Sie diese Identität, um die Additionstheoreme des Sinus und Kosinus zu beweisen. Zeigen Sie also, dass

$$\begin{aligned}\sin(x\pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x \sin y,\\ \cos(x\pm y) &= \cos x\cos y \mp \sin x\sin y,\end{aligned}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (4.a) Berechnen Sie die Limites (Grenzwerte) der folgenden Funktionen an $z_0 = 0$, sofern diese existieren:

i) $\frac{\overline{z}+z^2}{z}$,

ii) $\frac{\cos(z)-1}{z^2}$,

iii) $\frac{\sin(z)}{\overline{z}}$.

Aufgabe 5. Finden Sie zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so dass

$$\mathrm{Log}(z_1\cdot z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie de Moivres Formel

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = \cos n\phi + \mathrm{i}\sin n\phi.$$

Aufgabe 7. (7.a) Schreiben Sie die Funktion $f(z) := z^3+z+1$ in der Form $f(z) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$.

(7.b) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um $\mathrm{Re}\, f(z)$, $\mathrm{Im}\, f(z)$ und $|f(z)|$ auf dem Gebiet $\{z = x+\mathrm{i}y\} x \in [-1,1],\ y \in [-1,1]$ zu plotten.