Übung 3: Ableitung einer komplexen Funktion & die Cauchy–Riemann Gleichungen

Aufgabe 1. (1.a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen nach x und y und die Ableitung nach $z = x + \mathrm{i}y$ der folgenden Funktionen, sofern diese existieren:

i) $3z^3 + z - 3$,

ii) $\sin(\mathrm{Re}(z))$,

iii) $\frac{1}{z^2}$,

iv) $\mathrm{e}^{-\pi z^2}$.

(1.b) (*Bonus*) Setzen Sie die Funktion $f(z) := \frac{\overline{z}^2}{z}$ an $z_0 = 0$ stetig fort. Ist das Resultat an $z_0 = 0$ nach z differenzierbar?

Aufgabe 2. (2.a) Betrachten Sie die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathrm{i}\mathbf{e}_1, \mathrm{i}\mathbf{e}_2\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}^2$ bildet.

(2.b) Betrachten Sie nun eine Matrix

$$A_L := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Die Matrix A_L beschreibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ in der Basis $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathrm{i}\mathbf{e}_1, \mathrm{i}\mathbf{e}_2\}$. Was muss für ihre Koeffizientent a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, gelten damit L auch $\mathbb{C}$-linear ist?

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sowohl $\gamma : [0, 1] \to U$, als auch $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Sei ausserdem $g(t) := f(\gamma(t))$. Leiten Sie die Kettenregel

$$g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

her.

Aufgabe 4. Wir benutzen die Notation

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Welche der im Folgenden definierten Funktionen sind holomorph?

(4.a) $u(x, y) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $v(x, y) := 4x^3y - 4xy^3$.

(4.b) $u(x, y) := \sin(x^2 - y^2)\cosh(2xy)$, $v(x, y) := -\cos(x^2 - y^2)\sinh(2xy)$.

(4.c) $u(x, y) := \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $v(x, y) := \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

Hinweis: Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind gegeben durch

$$\cosh(z) := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \sinh(z) := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wir können f dann in algebraischen Koordinaten als $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ oder in Polarkoordinaten als $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) = \widetilde{u}(r, \phi) + \mathrm{i}\widetilde{v}(r, \phi)$ schreiben. Die Cauchy–Riemann Gleichungen in algebraischen Koordinaten sind aus der Vorlesung bekannt und lauten

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x, y).$$

Zeigen Sie, dass wenn f die Cauchy–Riemann Gleichungen in algebraischen Koordinaten erfüllt – also holomorph ist – dann f auch die Cauchy–Riemann Gleichungen in Polarkoordinaten

$$r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{u}(r, \phi) = \frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{v}(r, \phi), \qquad \frac{\partial}{\partial \phi}\widetilde{u}(r, \phi) = -r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{v}(r, \phi)$$

erfüllt.

Aufgabe 6. (6.a) Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gilt

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Wenden Sie die Kettenregel auf informelle Art und Weise auf $F(x, y)$ an, um den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} F + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} F \right)$$

herzuleiten.

(6.b) Wir definieren den Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Zeigen Sie dass, wenn eine Funktion f holomorph ist – also ihr Real- und Imaginärteil die Cauchy–Riemann Gleichungen erfüllen – dann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$$

ist.

Bemerkung: Wir nennen $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ die *Wirtinger Ableitung*.