MC 3: Ableitung einer komplexen Funktion & die Cauchy–Riemann Gleichungen

Einsendeschluss: Freitag, der 08. März 2019, um 19:00 Uhr.

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Welche der folgenden Funktionen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind holomorph?

(a) $g(z) = f(z)^2$

(b) $g(z) = f(z^2)$

(c) $g(z) = \overline{f(z)}$

(d) $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$

(e) $g(z) = f(\bar{z})$

Aufgabe 2. Sei $u(x, y) = x^2 + bxy + cy^2$ mit $b, c \in \mathbb{R}$. Unter welcher Bedingung ist u der Realteil einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, das heisst, $f = u + \mathrm{i}v$?

(a) Immer.

(b) Nie.

(c) Wenn $b = -2$.

(d) Wenn $c = -1$.

Aufgabe 3. Welche dieser Funktionen ist differenzierbar in $z = 0$?

(a) $f(z) = |z|$.

(b) $f(z) = z\overline{z}$.

(c) $f(z) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$.

(d) $f(z) = \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$.

(e) $f(z) = \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(\overline{z})^2$.

(f) $f(z) = z - \overline{z}$.

Aufgabe 4. Welche dieser Funktionen sind holomorph auf $\mathbb{C}$?

(a) $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 - 2\mathrm{i}xy$

(b) $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$

(c) $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2$

(d) $f(x + \mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$

(e) $f(x + iy) = y + \mathrm{i}x$

(f) $f(x + \mathrm{i}y) = -x + \mathrm{i}y$

Aufgabe 5. Welche dieser Funktionen sind holomorph auf $\mathbb{C}$?

(a) $f(x+\mathrm{i}y) = e^x e^{\mathrm{i}y}$

(b) $f(x+\mathrm{i}y) = e^x + e^{\mathrm{i}y}$

(c) $f(x+\mathrm{i}y) = e^x e^{-\mathrm{i}y}$

(d) $f(x+\mathrm{i}y) = e^{-x}\cos(y) - \mathrm{i}e^{-x}\sin(y)$

(e) $f(x+iy) = e^{-x}\cos(y)$

Aufgabe 6. Welche dieser Funktionen sind holomorph auf $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$?

(a) $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$

(b) $f(z) = \frac{1}{1-z\bar{z}}$

(c) $f(z) = \frac{1}{1+4z^2}$

(d) $f(z) = e^{z^2}$

(e) $f(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots$

(f) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$

Aufgabe 7. $\lim\limits_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 =$

(a) 1.

(b) -1.

(c) i.

(d) existiert nicht.

Aufgabe 8. Seien $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Aussage 'Wenn $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, so gilt $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$.' ist ...

(a) richtig.

(b) falsch.