Übung 4: Kurvenintegrale

Aufgabe 1. Seien $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie für folgende Kurven geeignete Parametrisierungen.

(1.a) Die Strecke von i nach $4 + 5\mathrm{i}$.

(1.b) Der Kreis um $3 - 2\mathrm{i}$ mit Radius 5.

Hinweis: Parametrisieren Sie den Kreis aus Teilaufgabe (1.b) im Gegenuhrzeigersinn.

Aufgabe 2. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale.

(2.a) Es gilt

$$\int_\gamma f(z) + g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.$$

(2.b) Bezeichne

$$|\gamma| := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t$$

die *Länge des Weges* γ. Dann gilt

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq |\gamma| \cdot \max_{t\in[0,1]} |f(\gamma(t))| = |\gamma| \cdot \max_{z\in\gamma([0,1])} |f(z)|.$$

(2.c) Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$, für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Hinweis: Es gilt

$$\overline{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie die folgenden Wegintegrale.

(3.a) Sei γ der Weg, welcher die Strecke von $1 + 5\mathrm{i}$ nach $3 + \mathrm{i}$ parametrisiert. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z.$$

(3.b) Sei γ der Weg, welcher den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis parametrisiert. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\,\mathrm{d}z.$$

(3.c) Sei γ der Weg, welcher den Weg von $-\frac{\pi}{2}$ über $\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ nach $\frac{\pi}{2}$ entlang des Kreises $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{\pi}{2}\}$ parametrisiert. Berechnen Sie

$$\int_\gamma z^3\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und γ der Weg, welcher den im Uhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis parametrisiert. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z.$$