MC 4: Kurvenintegrale

Einsendeschluss: Freitag, der 15. März 2019, um 19:00 Uhr.

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und sei γ die Parametrisierung der Strecke von a nach b. Dann gilt

$$\int_\gamma |z|^2 \, \mathrm{d}z = \ldots$$

(a) $\ldots \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$.

(b) $\ldots \frac{1}{3}\left(|b|^3 - |a|^3\right)$.

(c) $\ldots \frac{1}{3}(b-a) \cdot \left(|a|^2 + |b|^2 + \operatorname{Re}(a)\operatorname{Re}(b) + \operatorname{Im}(a)\operatorname{Im}(b)\right)$.

(d) $\ldots \frac{1}{3}(b-a) \cdot \left(|b-a|^2 - |a|^2 - |b|^2\right)$.

(e) Keines der angegebenen Ergebnisse.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und γ ein beliebiger Weg. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) $\operatorname{Re} \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \operatorname{Re} f(z) \, \mathrm{d}z$

(b) $\left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \int_\gamma |f(z)| \, \mathrm{d}z$

(c) Aus $f(z) \neq 0$ auf γ folgt, dass $\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \neq 0$ gilt.

(d) Keine der Aussagen trifft zu.

Aufgabe 3. Seien $a < b$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sodass $[a, b] \subset D$, und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Unter welcher Bedingung stimmt das Riemann Integral $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ mit dem komplexen Wegintegral $\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z$ überein, wobei γ die Strecke von a nach b parametrisiert?

(a) Nie.

(b) Das hängt von der Parametrisierung von γ ab.

(c) Das hängt von der Orientierung von γ ab.

(d) Es gibt keine allgemeine Bedingung.

(e) Immer.

Aufgabe 4. Seien $a, b \in \mathbb{C}$, mit $a \neq b$, $v = \frac{b-a}{|b-a|}$, γ eine Parametrisierung der Strecke von a nach b und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt $\ldots$

(a) $\ldots \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = v \cdot \int_{|a|}^{|b|} f(tv) \, \mathrm{d}t$.

(b) $\ldots \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_0^1 f((1-t)a + tb) \, \mathrm{d}t$.

(c) $\ldots \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = (b-a) \cdot \int_0^1 f((1-t)a + tb) \, \mathrm{d}t$.

(d) $\ldots \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = v \cdot \int_0^{|b-a|} f(a + tv) \, \mathrm{d}t$.