D-ITET FS 2019
Meike Akveld Komplexe Analysis

# *Übung 5*: Satz von Cauchy

**Aufgabe 1. (1.a)** Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um die folgenden Vektorfelder zu zeichnen.

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) := \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

**(1.b)** Berechnen Sie die Divergenz der Vektorfelder $f$ und $g$ und zeichnen Sie diese in derselben Programmiersprache, die Sie in (1.a) verwendet haben.

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2}\right) \mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma$ in Abbildung 1 gegeben ist.

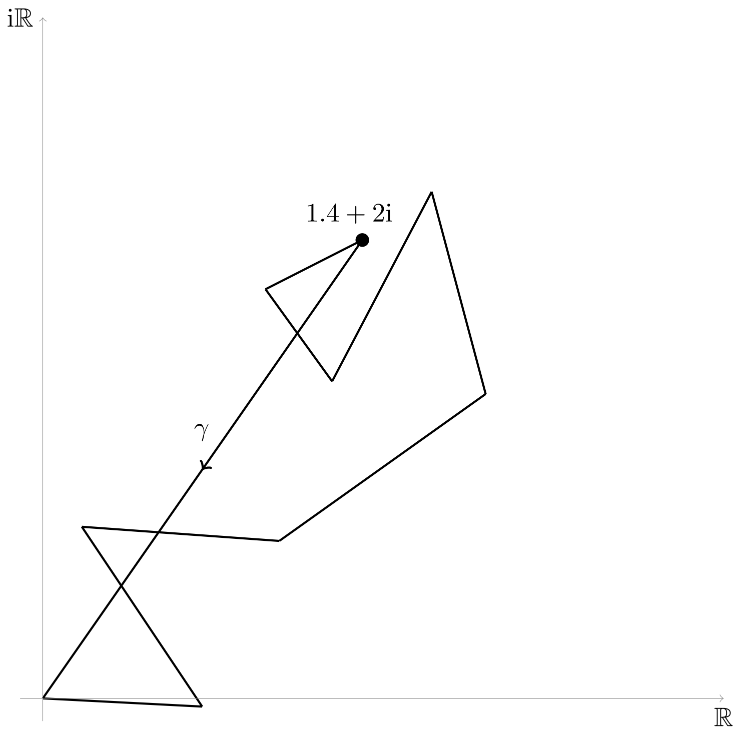


Abbildung 1: Der Weg $\gamma$.

**Aufgabe 3. (3.a)** Hat $z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion? Wenn ja, welche?

**(3.b)** Hat $z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ eine Stammfunktion? Wenn ja, welche?

**(3.c)** Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $\ell : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gibt sodass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exp(\ell(z)) = z$ gilt.

**Aufgabe 4.** Sei $U$ einfach zusammenhängend und $u : U \to \mathbb{C}$ harmonisch, i.e.

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\mathrm{Re}(f(x + \mathrm{i}y)) = u(x, y)$ gibt.

**(4.a)** Nehmen Sie an es gäbe $f$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$$

und dass die Ableitung von $f$ somit eindeutig durch $u$ bestimmt ist.

**(4.b)** Wir benutzen nun also den Ansatz

$$g(z) := \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$$

für die Ableitung von $f$. Zeigen Sie, dass $g$ holomorph ist.

**(4.c)** [*Schwierig*] Folgern Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ existiert mit $\operatorname{Re} f = u$.

*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Cauchy.

**(4.d)** Ist das in Teilaufgabe (4.c) konstruierte $f$ eindeutig?

**Aufgabe 5.** **(5.a)** Skizzieren Sie die Kurve $y^2 = x^2(x+1)$ in $\mathbb{C}$.

**(5.b)** Parametrisieren Sie die Kurve $y^2 = x^2(x+1)$ in $\mathbb{C}$ vom Anfangspunkt $1 + \sqrt{2}\mathrm{i}$ bis zum Endpunkt $1 - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

**(5.c)** Zeigen Sie, dass die parametrisierte Kurve aus Teilaufgabe (5.a) homotop ist zur Kurve $\delta(t) := 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}(1-2t)$, $t \in [0,1]$.