Übung 6: Anwendungen Satz von Cauchy

Aufgabe 1. Sei γ die Parametrisierung entgegen des Uhrzeigersinns des Quadrates Q_2 mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge 4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z-(\pi\mathrm{i}/2)}\,\mathrm{d}z$,

ii) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\,\mathrm{d}z$,

iii) $\int_\gamma \frac{z}{2z+1}\,\mathrm{d}z$,

iv) $\int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z^4}\,\mathrm{d}z$.

Hinweis: Der Kosinus hyperbolicus cosh ist definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Beim Lösen von Aufgabe iv) werden Sie ausserdem noch dem Sinus hyperbolicus sinh begegnen, welcher durch

$$\sinh(z) := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

definiert ist.

Aufgabe 2. Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ mit positiver Umlaufrichtung – das bedeutet, dass wenn wir entlang γ laufen, das von der Kurve eingeschlossene Gebiet G immer zu unserer Linken liegt. Wir betrachten

$$g(z) := \int_\gamma \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3}\,\mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie, dass $g(z) = 6\pi\mathrm{i}z$, wenn z innerhalb von G liegt, und $g(z) = 0$, wenn z ausserhalb von G liegt.

Aufgabe 3. [*Schwierig*] Sei f eine ganze Funktion für die es $A, B > 0$ gibt mit

$$|f(z)| \leq A|z| + B, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass $f(z) = az + b$ gilt, wobei $a, b \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Wenden Sie die Integralformel von Cauchy an, um zu zeigen dass $f^{(2)}(z) = 0$ auf ganz $\mathbb{C}$ gilt. Hier bietet es sich an Wege zu benutzen die Kreise um z mit Radius R beschreiben und dann den Grenzübergang $R \to \infty$ zu betrachten.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

welche auf $U := \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ holomorph ist. Berechnen Sie die Integrale

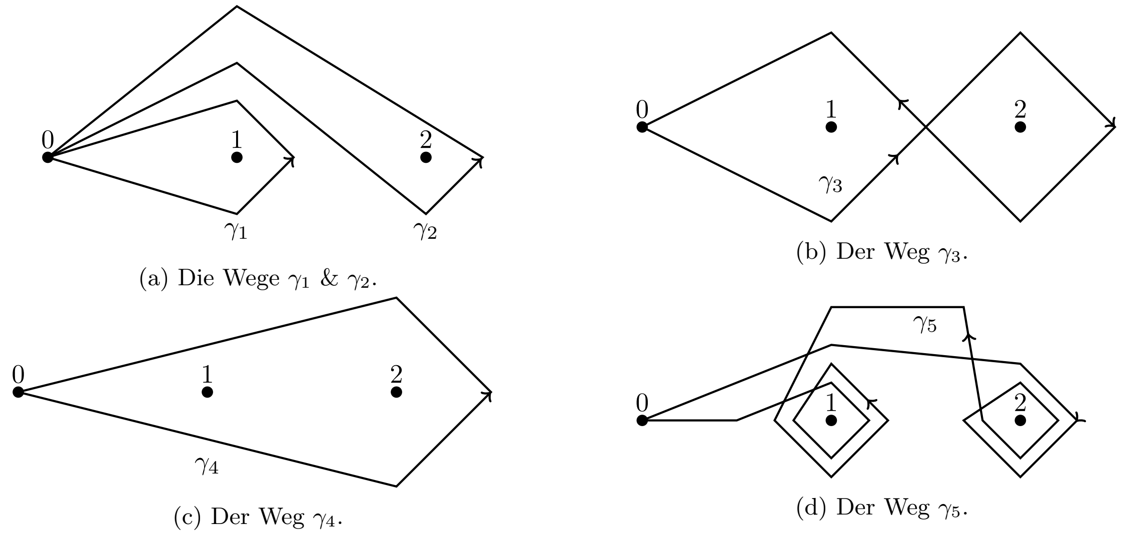
$$\int_{\gamma_m} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

für die in Abbildung 1 gegebenen Wege.

Aufgabe 5. *Hinweis:* Die folgende Aufgabe ist nur etwas für Interessierte am Programmieren. Beachten Sie, dass an der Prüfung keine Programmieraufgaben gestellt werden und es deshalb für das Erreichen der Note 6 in der Prüfung auch unerheblich ist, ob Sie diese Aufgabe lösen.

Wir wollen die Aussage des Mittelwertsatzes numerisch untersuchen. Wir betrachten dazu eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Der Mittelwertsatz besagt, dass wenn f holomorph ist auf einem Gebiet welches den Ball $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\}|z - z_0| < r$ mitsamt seines Randes enthält, dann

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t$$



(a) Die Wege γ_1 & γ_2.

(b) Der Weg γ_3.

(c) Der Weg γ_4.

(d) Der Weg γ_5.

Abbildung 1: Die Integrationswege.

gilt. Das Integral über $[0, 1]$ lässt sich numerisch (unter anderem) durch eine Integrationsmethode berechnen, welche wir *Monte Carlo Integration* nennen. Dazu betrachten wir $N = 1000$ unabhängige Realisierungen einer Zufallsvariable, welche uniform auf $[0, 1]$ verteilt ist. Nennen wir diese Zufallsvariabeln X_n, $n = 1, \ldots, N$, so approximieren wir das Integral durch

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t})\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} f(z_0 + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} X_n}).$$

(5.a) Implementieren Sie die Monte Carlo Methode wie sie oben beschrieben ist in Ihrer Lieblingsprogrammiersprache, um den Wert der folgenden Funktionen f an den folgenden Punkten z_0 zu approximieren. Benutzen Sie dabei $r = 1$. Was bemerken Sie?

i) $f(z) := \cos(z^3 - \sin(z))$, $z_0 = 0$,

ii) $f(z) := \tan(z^7 + \pi/4)$, $z_0 = 0$.

(5.b) Implementieren Sie den Schätzer

$$f(z_0) \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} f(z_0 + \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{n-1}{N}}),$$

für $N = 50$ und die Funktionen f und Punkte z_0 aus Teilaufgabe (5.a). Was fällt hier auf?