MC 6: Anwendungen Satz von Cauchy

Einsendeschluss: Freitag, der 29. März 2019, um 19:00 Uhr.

Aufgabe 1. Sei $\gamma(t) := \mathrm{i} + \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, $t \in [0,1]$. Der Wert es Integrals

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

ist

(a) e^{i}.

(b) $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$.

(c) $\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}}$.

(d) $\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}}{2}$.

(e) in keiner dieser Antworten gegeben.

Aufgabe 2. Sei $\gamma(t) := 2\pi \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, $t \in [0,1]$. Der Wert es Integrals

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{(z-\pi \mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}z$$

ist

(a) $-\mathrm{e}^{-\pi^2}$.

(b) $2\pi \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi^2 \mathrm{i}}$.

(c) $4\pi^2 \mathrm{e}^{\pi^2}$.

(d) $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\pi^2}$.

(e) in keiner dieser Antworten gegeben.

Aufgabe 3. Sei $r > 0$ und $\gamma_r(t) := r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, $t \in [0,1]$. Sei desweiteren

$$I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z, \qquad r \neq 1.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\lim_{r\to\infty} I(r) = 0$.

(b) $I(2) = -2\pi^2 \mathrm{i}$.

(c) $I(3) = -3\pi^2 \mathrm{i}$.

(d) $I'(r) = 0$, für alle $r \neq 1$.

(e) $I\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Aufgabe 4. Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ zwei Wege und $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, sodass $z_0 \neq z_1$ und $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$. Dann ist

(a) $\gamma_0 * \gamma_1$ geschlossen.

(b) $\gamma_0 * (-\gamma_1)$ geschlossen.

(c) $(-\gamma_0) * \gamma_1$ geschlossen.

(d) $(-\gamma_0) * (-\gamma_1)$ geschlossen.

(e) keiner der obigen Wege geschlossen.