Übung 7: Reihenentwicklungen

Aufgabe 1. (1.a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$$

in ihre Laurentreihe auf dem Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(1.b) Berechnen Sie die ersten drei Koeffizienten der Taylorentwicklung um $z_0 = 0$ von

$$f(z) = \frac{-\mathrm{e}^z}{(z-1)(z-2)}.$$

Aufgabe 2. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in ihre Laurentreihen:

i. $\cos\left(z^2\right)$ auf $\mathbb{C}$.

ii. $\dfrac{\sin(z)}{z}$ auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Laurentreihen der folgenden Funktionen an ihrer isolierten Singularität. Bestimmen Sie, ob die Singularität hebbar, ein Pol oder wesentlich ist.

i. $z \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

ii. $\dfrac{z^2}{1+z}$.

iii. $\dfrac{\cos(z)}{z}$.

Aufgabe 4. Im mathematischen Alltag ist es äusserst nützlich schnell entscheiden zu können, was die Typen der isolierten Singularitäten einer Funktion sind. Dazu werden wir in dieser Aufgabe und in der nächsten Serie ein Paar hilfreiche Aussagen herleiten. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, dass Sie schnell entscheiden können, ob eine isolierte Singularität ein Pol m-ter Ordnung ist.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit isolierter Singularität an $z_0 \in U$.

(4.a) Zeigen Sie, dass z_0 ein Pol m-ter Ordnung von f ist, wenn

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad z \in U,$$

wobei ϕ eine holomorphe Funktion ist, sodass $\phi(z_0) \neq 0$.

(4.b) [*Für besonderes Interessierte*] Zeigen Sie, dass

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad z \in U,$$

wobei ϕ eine holomorphe Funktion ist, sodass $\phi(z_0) \neq 0$, wenn z_0 ein Pol m-ter Ordnung ist.

Aufgabe 5. (5.a) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche holomorph auf einem offenen $U \subset \mathbb{C}$ ist. Benutzen Sie den Mittelwertsatz, um zu zeigen dass für alle $z \in U$ und hinreichend kleinen $r > 0$

$$|f(z)| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(z + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t})|$$

gilt.

(5.b) Benutzen Sie Aufgabe (5.a), um zu zeigen, dass $|f|$ in U kein striktes, lokales Maximum haben kann.

(5.c) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ in U kein striktes, lokales Maximum haben können.

(5.d) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Real-, Imaginärteil und Absolutbetrag der zwei Funktionen $z^3 - z$ und $\sin(z)$ auf der Menge

$$G := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid x \in (-2,2),\ y \in (-2,2)\}$$

zu zeichnen.