MC 7: Reihenentwicklung

Einsendeschluss: Freitag, der 5. April 2019, um 19:00 Uhr.

Aufgabe 1. Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

mit $c_{3n} = n$, $c_{3n+1} = n^2$ und $c_{3n+2} = n^3$, $n \geq 0$. Dann ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe

(a) $R = 0$.

(b) $R = 1$.

(c) $R = \infty$.

(d) nicht bestimmbar.

Aufgabe 2. Sei f eine holomorphe Funktion mit Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

welche Konvergenzradius $R > 0$ hat. Dann hat die Funktion $g(z) := f(z^2)$ die Taylorreihe

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^n$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$.

(d) g ist gar nicht holomorph um den Ursprung.

(e) Die richtige Taylorreihe ist in den Antworten (a)-(c) nicht gegeben.

Aufgabe 3. Definiert

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$$

eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

Aufgabe 4. Definiert

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$$

eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

Aufgabe 5. Definiert

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

Aufgabe 6. Definiert

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n$$

eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

Aufgabe 7. Definiert

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} z^n$$

eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

Aufgabe 8. Welchen Konvergenzradius hat die Reihe

$$-z + 4z^2 - 9z^3 + 16z^4 + \dots?$$

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) ∞.

Aufgabe 9. Es sei f ein Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}$. Dann folgt für die Funktion $g(z) = f(1/z)$:

(a) g ist eine ganze Funktion (also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph).

(b) g hat eine Polstelle erster Ordnung in $z = 0$.

(c) g hat eine Polstelle m-ter Ordnung in $z = 0$.

(d) g hat eine wesentliche Singularität in $z = 0$.

(e) $g(z) = z^{-m}$.

Aufgabe 10. Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

habe den Konvergenzradius R. Dann folgt für die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{-n} :$$

(a) $g(z) = 1/f(z)$.

(b) $g(z) = f(1/z)$.

(c) g hat eine wesentliche Singularität in z_0.

(d) Die Reihe g hat den Konvergenzradius $1/R$.

(e) Die Reihe g konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z - z_0| > 1/R$.

Aufgabe 11. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit wesentlicher Singularität an z_0. Dann folgt:

(a) Es existiert $n \in \mathbb{Z}$, sodass $g_n(z) = (z - z_0)^n f(z)$ eine hebbare Singularität in x_0 besitzt.

(b) Es gibt $n \in \mathbb{Z}$, sodass $g_n(z) = (z - z_0)^n f(z)$ eine Polstelle in z_0 besitzt.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ hat auch die Funktion $g_n(z) = (z - z_0)^n f(z)$ eine wesentliche Singularität an z_0.

(d) Keine der obigen Antworten.

Aufgabe 12. Gegeben sei eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit Konvergenzradius $R > 0$. Welchen Konvergenzradius hat dann die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}?$$

(a) $2R$

(b) $R/2$

(c) $\sqrt{R}$

(d) R^2