Übung 8: Cauchy's Residuensatz

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe wollen wir unsere Analyse der isolierten Singularitäten von letzter Woche (Aufgabe 4, Übung 7) fortsetzen. Zeigen Sie dazu die folgenden Aussagen:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\}$ eine holomorphe Funktion.

(1.a) [*Schwierig*] f hat eine hebbare Singularität an z_0, wenn $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert. In diesem Falle gilt $\operatorname{Res}(f; z_0) = 0$.

(1.b) [*Schwierig*] Man kann auch zeigen, dass f einen Pol an z_0 hat, wenn $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$ (dies ist allerdings nicht Ziel dieser Aufgabe). Sei nun z_0 ein Pol von f. Dann ist z_0 ein Pol m-ter Ordnung, wenn

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = a \neq 0,$$

wobei $a \in \mathbb{C}$.

Erinnerung: Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

so ist z_0 eine hebbare Singularität, falls $c_n = 0$, für alle $n < 0$.

Aufgabe 2. Wenden Sie in dieser Aufgabe nun ihre Erkenntnisse aus Aufgabe 1 (und aus Aufgabe 4 der Übung 7) an, um zu bestimmen was die Lage und der Typ der isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen sind:

i. $\dfrac{1}{(2-z)^3}$. ii. $\dfrac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}$. iii. $\dfrac{\sinh(z) - z}{z^3}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an all ihren isolierten Singularitäten:

i. $\dfrac{1}{z+z^2}$,

ii. $z\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$,

iii. $\dfrac{z - \sin(z)}{z}$,

iv. $\dfrac{\cot(z)}{z^4}$.

Hinweis: Die Laurententwicklung des Kotangens um $z_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots$$

Aufgabe 4. [*Schwierig*] Seien $\epsilon > 0$ und $\alpha, \phi \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie den Weg $\gamma_\epsilon : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher durch

$$\gamma_\epsilon(t) := \epsilon \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha t + \phi)}$$

gegeben ist und in Abbildung 1 dargestellt ist. Sei desweiteren $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 = 0$ und $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einem Pol erster Ordnung an z_0. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \alpha \cdot \mathrm{i} \cdot \operatorname{Res}(f; 0)$$

gilt.

Aufgabe 5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Res}(f; \overline{z_0}) = \overline{\operatorname{Res}(f; z_0)}$$

gilt, wenn $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.

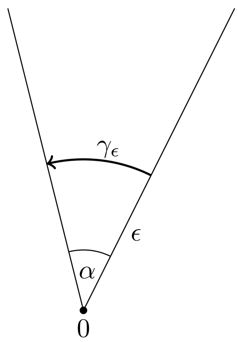

Abbildung 1: Der Weg γ_ϵ.