MC 8: Cauchy's Residuensatz

Einsendeschluss: Freitag, der 12. April 2019, um 19:00 Uhr.

Aufgabe 1. Es sei f eine gerade Funktion, die holomorph ist bis auf isolierte Singualritäten, d.h. für alle z aus dem Definitionsbereich gilt $f(-z) = f(z)$. Dann folgt:

(a) Die Laurentreihe von f im Entwicklungspunkt $z = 0$ hat die Form

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{2j+1} z^{2j+1} .$$

(b) Die Laurentreihe von f im Entwicklungspunkt $z = 0$ hat die Form

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{2j} z^{2j} .$$

(c) Die Laurentreihe von f zu einem beliebigen Entwicklungspunkt z_0 besteht nur aus Termen mit geraden Exponenten.

Aufgabe 2. Es sei f eine gerade Funktion, die holomorph ist bis auf isolierte Singualritäten, d.h. für alle z aus dem Definitionsbereich gilt $f(-z) = f(z)$. Dann folgt:

(a) f kann in $z = 0$ keinen Pol erster Ordnung haben.

(b) f kann keine wesentliche Singularität in $z = 0$ haben.

(c) Alle Polstellen von f haben gerade Ordnung.

Aufgabe 3. Die Funktion f habe in z_0 eine Polstelle n-ter Ordnung und sei auf der punktierten Kreisscheibe $K_R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ holomorph. Dann hat die Ableitung f' in z_0 ...

(a) keine isolierte Singularität.

(b) keine Polstelle.

(c) eine Polstelle $(n-1)$-ter Ordnung.

(d) eine Polstelle n-ter Ordnung.

(e) eine Polstelle $(n+1)$-ter Ordnung.

(f) eine Polstelle $2n$-ter Ordnung.

(g) Es ist keine allgemeine Aussage möglich.

Aufgabe 4. Die Funktion f habe eine hebbare Singularität in z_0. Dann folgt

(a) $\text{res}(f, z_0) = 0$.

(b) $\text{res}(f, z_0) = 1$.

(c) $\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$.

(d) Keine dieser Antworten.

Aufgabe 5. Es sei f eine holomorphe Funktion auf der punktierten Kreisscheibe $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ mit $\text{Res}(f, 0) = 1$. Dann folgt:

(a) f besitzt eine Stammfunktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$

(b) $\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 1$.

(c) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 2\pi i$.

(d) $\text{Res}(f', 0) = 1$

(e) Keine der vorigen Aussagen ist korrekt.