Übung 9: Anwendungen Cauchy's Residuensatz

Aufgabe 1. (1.a) Benutzen Sie den Residuensatz, um

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\,dz$$

zu berechnen, wobei der Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ den Kreis mit mathematisch positiver Orientierung, Mittelpunkt 2 und Radius ...

i. ...1 beschreibt. ii. ...3 beschreibt. iii. ...5 beschreibt.

(1.b) Betrachten Sie die Funktionen

$$f(z) = \frac{e^{tz}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \qquad \text{und} \qquad g(z) = \frac{2 + 3\sin(\pi z)}{z(z-1)^2},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ ein fixierter Parameter ist.

i. Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von f und g und berechnen Sie die zugehörigen Residuen.

ii. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ der Weg, welcher den Kreis um den Ursprung mit Radius 3 und positiver Orientierung parametrisiert. Sei $\gamma' : [0,1] \to \mathbb{C}$ der Weg, welcher das Quadrat mit den Eckpunkten $\pm(3 \pm 3i)$ und positiver Orientierung parametrisiert. Benutzen Sie den Residuensatz, um die Integrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\gamma'} g(z)\,dz$$

zu berechnen

Aufgabe 2. Finden Sie den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{\sin^2(z)}\,dz,$$

wobei γ das Quadrat mit den Eckpunkten 1, i, -1, $-$i mit mathematisch positiver Orientierung parametrisiert, ...

i. ...durch direkte Berechnung mit Hilfe der Definition des Kurvenintegrals.

ii. ...unter Verwendung des Residuensatzes.

Aufgabe 3. (3.a) Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

i. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6 + 1}\,dx = \frac{\pi}{6},$

ii. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2 + b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4b^3}(1 + ab)e^{-ab},$

(3.b) Benutzen Sie den Residuensatz und den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher in Abbildung 1 gegeben ist, um die Identität

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^3 + 1}\,dz = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

zu zeigen.

Aufgabe 4. (4.a) [*Schwierig*] Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \pi\cot(\pi z) = \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

und zeigen Sie, dass f die einfachen Polstellen $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, hat und dass die Residuen von f an all diesen Polstellen den Wert eins haben.

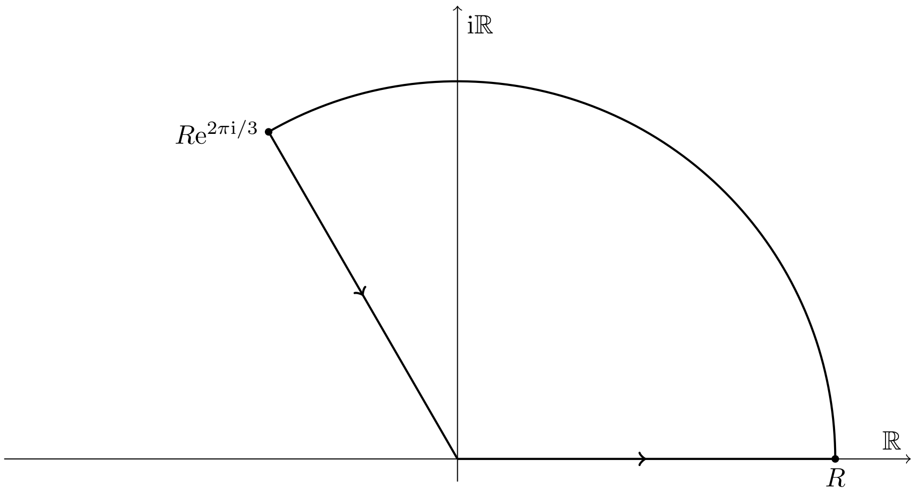

Abbildung 1: Der Weg γ_ϵ.

(4.b) [*Schwierig*] Zeigen Sie, dass f auf dem Rand ∂Q_N des Quadrates

$$Q_N := [-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}] \times \mathrm{i}[-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}],$$

mit $N \in \mathbb{N}$, beschränkt ist durch eine obere Schranke, welche nicht von N abhängig ist.

(4.c) [*Schwierig*] Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt und folgern Sie aus dem Residuensatz die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hinweis: Die Laurententwicklung des Kotangens um $z_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \ldots$$