Übung 10: Fourierreihen und die DFT

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige L-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^L f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^{\alpha+L} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eine *reellwertige*, stetige, 2π-periodische Funktion. Wir betrachten die komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(2.a) Leiten Sie Ausdrücke für $\operatorname{Re} c_n$ und $\operatorname{Im} c_n$ her.

(2.b) Isolieren Sie Real- und Imaginärteil von

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

(2.c) Zeigen Sie, dass

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt)$$

gilt, wobei

$$a_n := c_n + c_{-n}, \qquad b_n := \mathrm{i}(c_n - c_{-n}).$$

(2.d) Zeigen Sie, dass:

i. Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $b_n = 0$ gilt, genau dann wenn f gerade ist.

ii. Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = 0$ gilt, genau dann wenn f ungerade ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := t, \qquad t \in [0, 2\pi),$$

und $f(t + 2\pi) = f(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

(3.a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

(3.b) Berechnen Sie die diskrete Fourier Transformation $\widehat{f}(n)$ von f.

(3.c) Berechnen Sie die reelle Fourier Reihe von f

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt).$$

(3.d) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Graphen von

$$T_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt),$$

für $N = 1, 2, 5, 10, 100$, zu zeichnen.

(3.d) Berechnen Sie $\hat{\hat{f}}(0)$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 4. Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := |t|, \qquad |t| \in [-\pi, \pi),$$

und $f(t + 2\pi) = f(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

(4.a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

(4.b) Berechnen Sie die diskrete Fourier Transformation $\widehat{f}(n)$ von f.

(4.c) Berechnen Sie die reelle Fourier Reihe von f

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt).$$

(4.d) Benutzen Sie Ihre Lieblingsprogrammiersprache, um den Graphen von

$$T_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \sin(nt),$$

für $N = 1, 2, 5, 10, 100$, zu zeichnen.

Aufgabe 5. Stellen Sie die folgenden trigonometrischen Polynome als komplexe Fourierreihen dar. Berechnen Sie jeweils aus der komplexen Fourriereihe auch die reelle Fourierreihe.

i. $f(t) = \sin^2(t)\cos^3(t)$

ii. $g(t) = \sin(2t)\cos(3t)$