Übung 11: Die Fouriertransformation

Aufgabe 1. Wir betrachten die 2-periodische Funktion gegeben durch

$$f(t) := t^2, \qquad t \in [-1, 1].$$

(1.a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.

(1.b) Berechnen Sie die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(1.c) Verwenden Sie den Satz von Parseval, um den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 2. In der Vorlesung hatten wir die diskrete Fourier Transformation einer stetigen, 2π-periodischen Funktion f eingeführt als

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Wir werden nun einige der wichtigsten Eigenschaften der Fourier Transformation beweisen.

(2.a) Sei f stetig. Zeigen Sie, dass $\overline{\widehat{f}(n)} = \widehat{f}(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, gilt genau dann, wenn $f(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

(2.b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Modulationsoperator M_a definiert durch

$$\mathrm{M}_a f(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}at} \cdot f(t).$$

Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{Z}$,

$$(\mathrm{M}_m f)\widehat{\ }(n) = \widehat{f}(n - m)$$

gilt.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe und in Aufgabe 4 wollen wir uns mit der kontinuierlichen Fouriertransformation befassen. Diese wurde in der Vorlesung eingeführt als

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi} \,\mathrm{d}t, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Bitte beachten Sie, dass damit die Notation für die kontinuierliche und die diskrete Fouriertransformation *gleichermassen* ein Dach über der zu transformierenden Funktion ist. Es ist aber die diskrete Fouriertransformation definiert für periodische Funktionen und die kontinuierliche Fouriertransformation definiert für absolut integrierbare Funktionen. Damit ist aus dem Kontext *immer* klar welche Fouriertransformation gemeint ist.

(3.a) Berechnen Sie die *kontinuierliche* Fouriertransformation der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(3.b) Benutzen Sie den Satz von Plancherel und Aufgabe (3.a), um zu zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2} \,\mathrm{d}\xi = \pi$$

gilt.

Bemerkung: Michel Plancherel war ein Schweizer Mathematiker und Rektor der ETH Zürich von 1931 bis 1935. Den Satz von Plancherel hatte er bereits vor dieser Zeit bewiesen (1910).

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Wir erinnern uns an die Definition des Modulationsoperators aus Aufgabe 2.

(4.a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Translationsoperator T_a definiert durch

$$\mathrm{T}_a f(t) := f(t-a).$$

Zeigen Sie, dass

$$(\mathrm{T}_a f)\widehat{\ }(s) = \mathrm{M}_{-a}\widehat{f}(s)$$

gilt.

(4.b) Zeigen Sie, dass

$$(\mathrm{M}_a f)\widehat{\ }(s) = \mathrm{T}_a\widehat{f}(s)$$

gilt.