MC 11: Die Fouriertransformation

Einsendeschluss: Freitag, der 10. Mai 2019, um 19:00 Uhr.

Aufgabe 1. Es bezeichne

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \cdots + \frac{\sin\big((2N-1)t\big)}{2N-1}\right), \qquad N \in \mathbb{N},$$

die Partialsummen der Fourierreihenentwicklung der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \le t < \pi, \\ -1 & \text{wenn } -\pi \le t < 0, \end{cases}$$

und 2π-periodisch fortgesetzt. Welche der folgenden Aussagen trifft dann zu?

Hinweis: Bei diesr Aufgabe sind mehrere Antworten richtig!

(a) $\lim_{N\to\infty} S_N(t) = f(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{N\to\infty} S_N(0) = 0$.

(c) $\lim_{N\to\infty} \max_{t\in[-\pi,\pi]} S_N(t) = 1$.

(d) $\lim_{N\to\infty} S_N(t) = f(t)$, für alle $0 < t < \pi$ und $-\pi < t < 0$.

Aufgabe 2. Sei

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T} t}$$

die Fourierreihenentwicklung einer T-periodischen stetig differenzierbaren Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

(b) $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$

(c) $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2$

Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ und ihre Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}\,.$$

Wie lautet dann die Fouriertransformierte von $f(at+b) = \mathrm{e}^{-|at+b|}$?

(a) $\dfrac{2a}{a^2+\xi^2}$

(b) $\dfrac{2}{1+\xi^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\xi}$

(c) $\dfrac{2|a|}{1+a^2\xi^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\xi}$

(d) $\dfrac{2|a|}{a^2+\xi^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\xi/a}$

Aufgabe 4. Die Fouriertransformation von

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{wenn } t \geq 0, \\ 0 & \text{wenn } t < 0. \end{cases}$$

ist

(a) $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}\xi}$

(b) $f(\xi) = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}\xi}$

(c) $f(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2} + \mathrm{i}\dfrac{\xi}{1+\xi^2}$

(d) $f(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$

Aufgabe 5. Die Fouriertransformierte $\widehat{f}(\xi)$ einer gegebenen Funktion $f(t)$ ist rein imaginär, d.h. $\operatorname{Re}\widehat{f}(\xi) = 0$ für alle ξ, falls

(a) f gerade und reellwertig ist.

(b) f reellwertig ist.

(c) f ungerade und reellwertig ist.

Aufgabe 6. Die Fouriertransformierte $\widehat{f}(\xi)$ einer gegebenen Funktion $f(t)$ ist rein reell, d.h. $\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi) = 0$ für alle ξ, falls

(a) $\widehat{f}$ gerade ist.

(b) $\widehat{f}$ ungerade ist.

(c) $f(-t) = \overline{f(t)}$