Übung 12: Faltungen

Aufgabe 1. Die Faltung zweier Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ haben wir in der Vorlesung definiert als

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = g * f(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie die Funktion

$$\mathbb{1}_{[0,1]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Vorlesung haben wir $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ berechnet. Skizzieren Sie $\mathbb{1}_{[0,1]}$, $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ und $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ Berechnen Sie dazu $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$. Was fällt Ihnen an Hand Ihrer Skizzen auf?

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Faltung $f * g$ in den folgenden zwei Fällen:

(2.a) Seien

$$f(t) := \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \qquad \text{und} \qquad g(t) := \begin{cases} t & \text{wenn } t \in [0,1], \\ 1 & \text{wenn } t \in (1,2], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2.b) Seien

$$f(t) := \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \qquad \text{und} \qquad g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{wenn } t \in [0,\infty), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3. Erinnern Sie sich an die Definition der Fourier Transformation einer absolut integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zwei absolut integrierbare Funktionen sind, dann $(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. Benutzen Sie die inverse Fouriertransformation, um zu zeigen, dass

$$(f \cdot g)\widehat{\ } = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\widehat{f} * \widehat{g}\right),$$

wenn zusätzlich $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ absolut integrierbar sind.

Hinweis: Wenden Sie die Faltungsformel $(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ auf die Funktionen $F := \widehat{f}$ und $G := \widehat{g}$ an. Nehmen Sie an, dass f, F, g und G stetig sind. Was folgt dann aus dem Integralsatz von Fourier? Argumentieren Sie zu guter Letzt dafür, dass f, F, g und G stetig sind.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Funktion $f(t) := \exp(-|t|)$, für $t \in \mathbb{R}$.

(4.a) Bestimmen Sie $\widehat{f}$ durch direkte Berechnung des Integrals (1).

(4.b) Verifizieren Sie Ihr Resultat aus Aufgabe (4.a) unter Hilfe des Integralsatzes von Fourier. D.h. berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}\xi, \qquad t \in \mathbb{R},$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabe (4.a).

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung des obigen Integrals den Residuensatz. Nehmen Sie dazu erst einmal an, dass $t \geq 0$ und benutzen Sie die Integrationswege $\gamma_R^{(0)}(\tau) := 2R\tau - R$ und $\gamma_R^{(1)}(\tau) := R\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}$, für $\tau \in [0,1]$ und $R > 0$. Was passiert, wenn $t < 0$?

(4.c) Berechnen Sie die Faltung $g := f * f$.

(4.d) Berechnen Sie $\widehat{g}$ durch direkte Berechnung des Integrals (1). Vergleichen Sie anschliessend Ihr Resultat mit $\widehat{f}^2$. Was fällt Ihnen auf?

(4.e) Bestimmen Sie die Fourier Transformation der modulierten Funktion

$$h(t) := \exp(-|t|)\cos(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(4.f) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Zur Berechnung des zweiten Integrals können Sie die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

ohne Beweis verwenden. Wenn Sie gerade Lust haben ein Residuenintegral zu berechnen, so dürfen Sie die obige Formel natürlich auch gerne beweisen.

Aufgabe 5. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion. Benutzen Sie in den folgenden zwei Aufgaben den Faltungssatz.

(5.a) Drücken Sie die Fourier Transformation der Funktion

$$f(t) := \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{s-t} g(s) \,\mathrm{d}s$$

durch $\widehat{g}$ aus.

(5.b) Drücken Sie die Fourier Transformation der Funktion

$$f(t) := \int_{t-1}^{t} g(s) \,\mathrm{d}s$$

durch $\widehat{g}$ aus.