

Übung 13: Die Laplacetransformation

Hinweis: Diese Serie wird durch die Assistierenden noch korrigiert werden, wenn Sie sie rechtzeitig abgeben. Ihre korrigierte Abgabe finden Sie dann im Fach ihres Assistenten/ihrer Assistentin im Vorraum von HG G 53.x/54.x.

Aufgabe 1. Entscheiden Sie bei den folgenden Funktionen, ob die Laplacetransformation existiert. Existiert die Transformation, so berechnen Sie sie. Existiert die Transformation nicht, so erklären Sie warum.

- i. e^{3t}
- ii. e^{t^2}
- iii. $e^{1/t}$
- iv. $1/t$

Aufgabe 2. (2.a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen.

- i. $e^{\alpha t}$
- ii. t^2

(2.b) Berechnen Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen.

- i. $t^2 e^{-3t}$
- ii. $e^{-4t} \sin(5t)$

Aufgabe 3. Finden Sie die Laplacetransformation der folgenden Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$:

i.

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } t \in [0, 6], \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii.

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } t \in [0, 3], \\ 6 \sin(t - 3) & \text{sonst.} \end{cases}$$

iii.

$$f(t) := \begin{cases} 4 & \text{wenn } t \in [0, 2], \\ 4 + 5(t - 2)e^{t-2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4. (4.a) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}.$$

Benutzen Sie dazu eine Partialbruchzerlegung.

(4.b) Bestimmen Sie erneut die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}.$$

Benutzen Sie diesmal den Faltungssatz aus der Vorlesung.

(4.c) [*Diese Aufgabe ist etwas schwerer als die Anderen*] Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$F(s) = \frac{-2s^2 + 18s - 3}{s^3 - s^2 - 8s + 12}$$

durch eine Methode Ihrer Wahl.

Aufgabe 5. (5.a) Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\dot{y}(t) + y(t) = e^t, \quad t > 0, \quad y(0) = 1.$$

(5.b) Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) &= 4t^2, & t > 0, \\ \dot{y}(0) &= 4, & y(0) = 1. \end{aligned}$$