D-ITET FS 2019
Meike Akveld Komplexe Analysis

Übung 14: Ferienserie

Aufgabe 1. Ermitteln Sie mit Hilfe der Cauchy–Riemann Gleichungen, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktionen

$$g(z) := g(x + \mathrm{i}y) := y^3 - \mathrm{i}x^3 + 3(x^2y - \mathrm{i}xy^2)$$

und

$$f(z) := \sin(z^2)$$

komplex differenzierbar sind.

Aufgabe 2. Sei $a > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

i. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

ii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a)^3}\,\mathrm{d}x$

iv. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-3}{x^4 - 2\mathrm{i}x^3 + 3x^2 - 8\mathrm{i}x - 4}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade 6-periodische Funktion gegeben durch

$$f(t) := \begin{cases} t & t \in [0, 2], \\ -2t + 6 & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

(3.a) Skizzieren Sie f.

(3.b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(3.c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{2}{3}\pi n\right).$$

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion gegeben durch

$$f(t) := t - \frac{\pi}{2}, \qquad t \in [0, \pi].$$

(4.a) Skizzieren Sie f.

(4.b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(4.c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die kontinuierliche Fouriertransformation der Funktion

$$f(t) := \frac{1}{t^2 + 2t + 2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die kontinuierliche Fouriertransformation der Funktion

$$f(t) := \frac{t^2}{(t^2 + 16)^2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 7. Sei $a > 0$ und

$$f(t) := \begin{cases} a - |t| & \text{wenn } t \in [-a, a], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation von f.

Aufgabe 8. (8.a) Sei

$$f(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{wenn } t \in [0,\infty), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation von f.

(8.b) Sei $n \geq 1$. Benutzen Sie vollständige Induktion, um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{(\xi - \mathrm{i})^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\xi^{n-1}} \frac{1}{\xi - \mathrm{i}}$$

gilt.

(8.c) Benutzen Sie vollständige Induktion, um zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty t^{2n-2} \mathrm{e}^{-2t} \, \mathrm{d}t = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}}$$

gilt.

(8.d) Benutzen Sie den Satz von Plancherel und die Aufgaben (8.a) bis (8.c), um das *Integral von Wallis*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+\xi^2)^n} \, \mathrm{d}\xi$$

zu berechnen.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die Originalfunktion der folgenden Laplacetransformierten:

$$F(s) = \frac{s^2 - 8s + 4}{s(s-1)(s-2)}.$$

Aufgabe 10. Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 9y(t) &= t^2, \qquad t > 0, \\ \dot{y}(0) = 0, &\qquad y(0) = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) &= 9\mathrm{e}^{2t}, \qquad t > 0, \\ \dot{y}(0) = 1, &\qquad y(0) = 0. \end{aligned}$$