# Musterlösung der Prüfung Komplexe Analysis

**Aufgabe 1 [9 Punkte]** Berechnen Sie das definite Integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Begründen Sie dabei alle Rechenschritte.

**Hinweis:** Der Weg, welcher in Abbildung 1 gegeben ist, kann hilfreich sein.

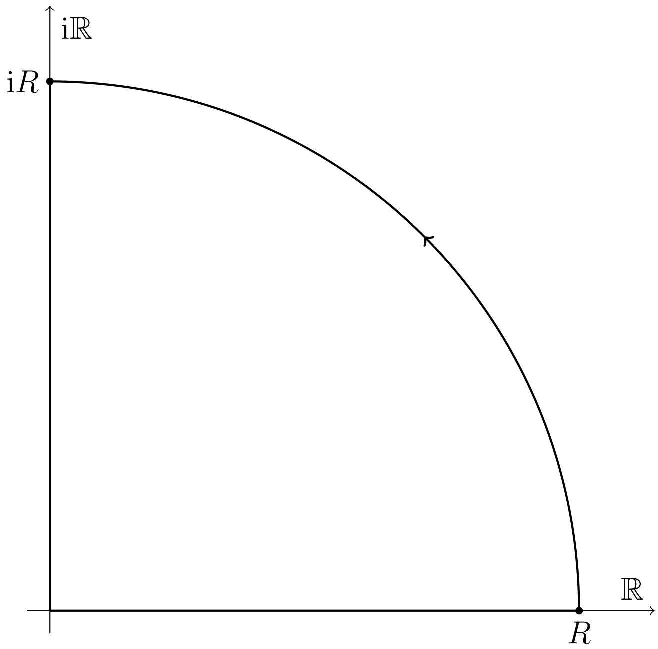


Abbildung 1: Ein Integrationsweg.

**Lösung:** Wir betrachten die Wegstücke $\gamma_R^{(0)} : [0,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R^{(1)} : [0,1] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_R^{(2)} : [0,R] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma_R^{(0)}(t) := t, \qquad \gamma_R^{(1)}(t) := R\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i} t}{2}} \qquad \text{und} \qquad \gamma_R^{(2)}(t) := \mathrm{i}R - \mathrm{i}t.$$

Damit gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{z}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

und

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(2)}} \frac{z}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{(R-t)}{(R-t)^4+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Ausserdem lässt sich leicht abschätzen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{z}{z^4+1}\,\mathrm{d}z \right| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{2} \cdot \frac{R}{R^4-1} = 0.$$

Laut dem Residuensatz gilt nun also

$$2 \cdot \int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)} * \gamma_R^{(2)}} \frac{z}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^4+1}; z_i\right),$$

wobei $\{z_i\}_i$ die Singularitäten der Funktion $z/(z^4+1)$ innerhalb des Integrationsgebietes beschreibt. Man sieht leicht, dass $z_0 = \exp(\pi\mathrm{i}/4)$ die einzige Nullstelle des Polynoms $z^4+1$ innerhalb des von $\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)} * \gamma_R^{(2)}$ umrandeten Gebietes ist. Damit folgt also

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^4+1}; z_0\right) = \pi\mathrm{i} \cdot \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{z}{z^4+1} = \frac{\pi\mathrm{i}}{4z_0^2} = \frac{\pi}{4}.$$

**Aufgabe 2 [9 Punkte]** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $2\pi$-periodische, ungerade Funktion, die durch

$$f(x) = x(\pi - x),$$

für $0 \leq x \leq \pi$, gegeben ist.

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f$.

(b) [6 Punkte] Berechnen Sie die Fourier-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$$

von $f$.

(c) [2 Punkte] Benutzen Sie (b), um die Reihe

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots$$

zu berechnen.

**Lösung:**

(a) Betrachten Sie die Funktion in der Abbildung 2.

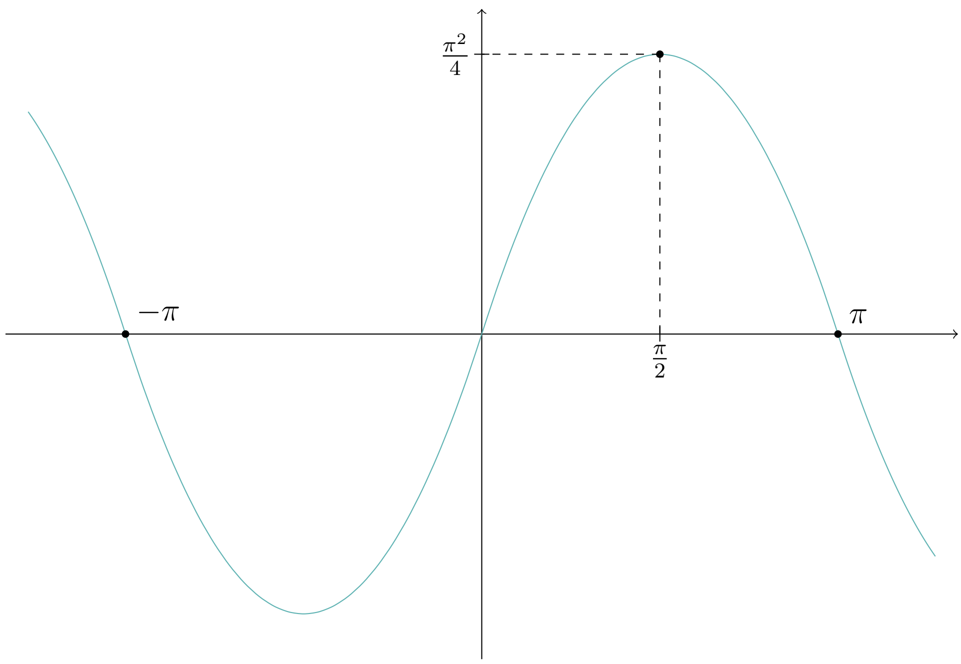


Abbildung 2: Die Funktion $f$.

(b) Wir haben
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$
Wir können obiges Integral zerlegen in
$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$
Vor allem der zweite Summand ist hier interessant. Da sowohl $f$ als auch $\exp(-\mathrm{i}nx)$ $2\pi$-periodisch sind, gilt
$$\int_\pi^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$
Die Substitution $y = -x$ erlaubt uns dann
$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(-y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y = -\int_0^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y$$
zu berechnen, da $f$ ungerade ist, sodass
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$
Es gilt
$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x,$$
laut der Definition von $f$. Mit partieller Integration folgt
$$\int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\mathrm{i}n} \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\mathrm{i}n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$
und
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\mathrm{i}n} \cdot \int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{\mathrm{i}n}(-1)^n - \frac{2}{\mathrm{i}n} \cdot \int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{\mathrm{i}n}(-1)^n + \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n - \frac{2}{\mathrm{i}n^3}\left((-1)^n - 1\right).\end{aligned}$$
Also gilt auch
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{n^2}\left((-1)^n - 1\right) - \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n + \frac{2}{\mathrm{i}n^3}\left((-1)^n - 1\right) \\ &= \frac{2}{\mathrm{i}n^3}\left((-1)^n - 1\right) - \frac{\pi}{n^2}\left((-1)^n + 1\right).\end{aligned}$$
Es folgt, dass
$$c_n = \frac{2}{\mathrm{i}\pi n^3} \cdot \left(1 - (-1)^n\right)$$
und damit
$$c_{2n-1} = \frac{4}{\mathrm{i}\pi(2n-1)^3}, \qquad c_{2n} = 0.$$
Wir schliessen, dass
$$f(x) = \frac{4}{\mathrm{i}\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)x},$$
da $f$ stetig ist.

(c) Aus Aufgabe (b) folgt sofort, dass

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4} &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\mathrm{i}\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \\ &= \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3},\end{aligned}$$

da $f$ stetig an der Stelle $\pi/2$ ist. Also gilt

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Aufgabe 3 [6 Punkte]** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, deren Fouriertransformierte existiert und durch

$$\widehat{f}(y) = \frac{y}{y^4 + 1}$$

gegeben ist. Berechnen Sie:

(a) [3 Punkte] $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x$

(b) [3 Punkte] $f'(0)$

**Hinweis:** Sie können bei Aufgabe (b) die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^4 + 1} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

verwenden *ohne* diese zu beweisen.

**Lösung:**

(a) Wir betrachten die Funktion $g(x) := x f(x)$. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass damit

$$\widehat{g}(s) = \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \widehat{f}(s) = \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{s}{s^4 + 1} = \mathrm{i} \cdot \frac{1 - 3s^4}{(s^4 + 1)^2}$$

gilt. Also folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, \mathrm{d}x = \widehat{g}(0) = \mathrm{i}.$$

(b) Wir betrachten die Funktion $h(x) := f'(x)$. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass damit

$$\widehat{h}(s) = \mathrm{i}s \cdot \widehat{f}(s) = \frac{\mathrm{i}s^2}{s^4 + 1}$$

gilt. Da $\widehat{h}$ absolut integrierbar ist, erhalten wir $h$ durch die Rechnung

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} \, \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{s^4 + 1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} \, \mathrm{d}s.$$

Damit gilt auch

$$f'(0) = h(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{s^4 + 1} \, \mathrm{d}s.$$

Nun benutzen wir den Hinweis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^4+1}\, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

und folgern, dass

$$f'(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}$$

gilt.

## Fragen [15 Punkte]

(a) [3 Punkte] Sie werden von jüngeren Mitstudierenden gefragt was $\mathrm{i}^{\sqrt{2}}$ ist. Erklären Sie ausführlich und in eigenen Worten.

**Hinweis:** Bitten schreiben Sie ganze Sätze.

(b) [3 Punkte] Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{wenn } 0 \leq x \leq 6, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad g(x) = x^2 - 3ix,$$

und sei $h = f * g$ die Faltung von $f$ mit $g$. Berechnen Sie $h(4)$.

**Hinweis:** Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Laplacetransformation der Funktion $\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)$.

**Hinweis:** Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(d) [3 Punkte] Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x+2}{x^2+y^2+4x+2} - \mathrm{i} \cdot \frac{y}{x^2+y^2+4x+2}.$$

Ist $f$ holomorph? Begründen Sie.

(e) [3 Punkte] Sei $f(z) := \cos(1 - \cos(z))$. Berechnen Sie $a_4$ und $a_5$ in der Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

**Hinweis:** Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

**Lösung:**

(a) [3 Punkte] $\mathrm{i}^{\sqrt{2}}$ beschreibt die Menge der Lösungen der Gleichung $z = \mathrm{i}^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \cdot \log \mathrm{i})$. Dass diese Gleichung mehr als nur eine Lösung hat liegt daran, dass der komplexe Logarithmus als Umkehrfunktion der komplexen Exponentialfunktion nicht eindeutig sein kann, da $\exp(\phi + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(\phi)$. In diesem Sinne gilt also

$$\mathrm{i}^{\sqrt{2}} = \left\{ \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{2} + 2\pi\mathrm{i}k\right)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathcal{S}^1,$$

wobei $\mathcal{S}^1$ den Einheitskreis beschreibt.

(b) [3 Punkte] Die Lösung ist $4-3\mathrm{i}$.

(c) [3 Punkte] Die Lösung ist $\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$.

(d) [3 Punkte] Wir betrachten den Real- und Imaginärteil

$$u(x,y) := \frac{x+2}{x^2+y^2+4x+2} \qquad \text{und} \qquad v(x,y) := -\frac{y}{x^2+y^2+4x+2}$$

von $f$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) &= \frac{(x^2+y^2+4x+2)-(x+2)\cdot(2x+4)}{(x^2+y^2+4x+2)^2} = \frac{-x^2+y^2-4x-6}{(x^2+y^2+4x+2)^2} \\ &\neq \frac{-x^2+y^2-4x-2}{(x^2+y^2+4x+2)^2} = -\frac{(x^2+y^2+4x+2)-2y^2}{(x^2+y^2+4x+2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \frac{-2y(x+2)}{(x^2+y^2+4x+2)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y).$$

Damit sind die Cauchy–Riemann Gleichungen nicht erfüllt und $f$ ist nicht holomorph.

**Alternative Lösung:** Man kann auch sehen, dass der Nenner von $f$ gegeben ist durch $x^2+y^2+4x+2=(x+2)^2+y^2-2$. Daher beschreibt die Gleichung $x^2+y^2+4x+2=0$ einen Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um 2 und hat $f$ unendlich viele Polstellen in $U$. Also kann $f$ nicht holomorph sein.

(e) [3 Punkte] Die Resultate sind $a_4=-1/8$ und $a_5=0$.