Prof. Dr. P. S. Jossen Februar 2019

Musterlösung der Prüfung Komplexe Analysis

Aufgabe 1 [9 Punkte] Sei $c > 0$ eine positive reele Zahl. Berechnen Sie das definite Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Begründen Sie dabei alle Rechenschritte.

Lösung: Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(c+1)}{2c^3}\mathrm{e}^{-c}.$$

Aufgabe 2 [9 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische, gerade Funktion, die durch

$$f(x) = x^2,$$

für $0 \leq x \leq \pi$, gegeben ist.

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(b) [6 Punkte] Berechnen Sie die Fourier-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

von f.

(c) [2 Punkte] Benutzen Sie (b), um die Reihe

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

zu berechnen.

Lösung:

(a) Betrachte Abbildung 1.

(b) Wir erhalten

$$c_0 = \frac{\pi^2}{3}, \qquad c_n = \frac{2(-1)^n}{n^2},$$

für $n \neq 0$, durch zweimaliges Anwenden von partieller Integration.

(c) Durch auswerten der Fourierreihe an $x = 0$ erhalten wir

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

da f stetig ist.

Aufgabe 3 [6 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion deren Fouriertransformierte existiert und durch

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{y^8+8}$$

gegeben ist. Berechnen Sie:

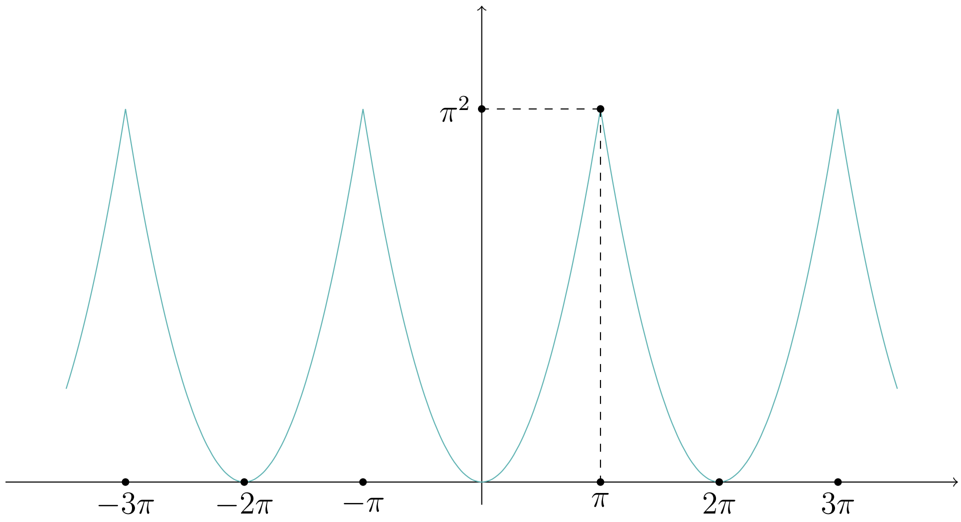

Abbildung 1: Die Funktion f.

(a) [3 Punkte] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} f''(x)\,\mathrm{d}x$

(b) [3 Punkte] $f''(0)$

Hinweis: Mit dem Residuensatz lässt sich zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^8+8}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{2}}-2}\cdot\pi$$

gilt.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} f''(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{f''}(1) = -\widehat{f}(1) = -\frac{1}{9}.$$

(b) Laut dem Fourier Integralsatz gilt

$$f''(0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f''}(y)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{y^8+8}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{2}}-2}.$$

Fragen [12 Punkte]

(a) [3 Punkte] Erklären Sie in eigenen Worten was der Ausdruck $(\sqrt{2})^{\mathrm{i}}$ bedeutet. Falls das möglich ist, bestimmen Sie reelle Zahlen a und b mit $(\sqrt{2})^{\mathrm{i}} = a + b\mathrm{i}$.

(b) [3 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $g = f * f$ die Faltung von f mit sich selbst und $h = g * f$. Berechnen Sie $h(\frac{1}{3})$.

Hinweis: Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die inverse Laplacetransformation der Funktion $F(s) = \frac{2s+5}{(2s-3)(2s+1)^2}$. Aus einer Tafel für Laplacetransformationen entnehmen Sie:

Funktion $f(t)$	Laplacetransformierte $\mathcal{L}(f)(s)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Hinweis: Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(d) [3 Punkte] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x+\mathrm{i}y) = \frac{e^x y \sin(y)}{x^2+y^2} + \frac{e^x x \cos(y)}{x^2+y^2} + \frac{\mathrm{i}e^x x \sin(y)}{x^2+y^2} - \frac{\mathrm{i}e^x y \cos(y)}{x^2+y^2}.$$

Ist die Funktion f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\log\sqrt{2}} = \cos\left(\log\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\log\sqrt{2}\right).$$

(b) Es gilt

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

(c) Wir erhalten

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{2s+5}{(2s-3)(2s+1)^2}\right](t) = \frac{1}{4}e^{-t/2}\left(-t + e^{2t} - 1\right).$$

(d) Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Es gilt

$$f(x+\mathrm{i}y) = \frac{e^z}{z}$$

und deshalb ist f holomorph auf $\mathrm{C} \setminus \{0\}$.