Prof. Dr. P. S. Jossen August 2018

Komplexe Analysis

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (10 Blätter) *eigene, handschriftliche* Notizen.
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht mit der vollen Punktezahl bewertet!

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Komplexe Analysis	
Datum	22.08.2018	

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Fragen	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen.
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn die Assistierenden das Signal dazu geben!**

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 [9 Punkte] Berechnen Sie das definite Integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Begründen Sie dabei alle Rechenschritte.

Hinweis: Der Weg, welcher in Abbildung 1 gegeben ist, kann hilfreich sein.

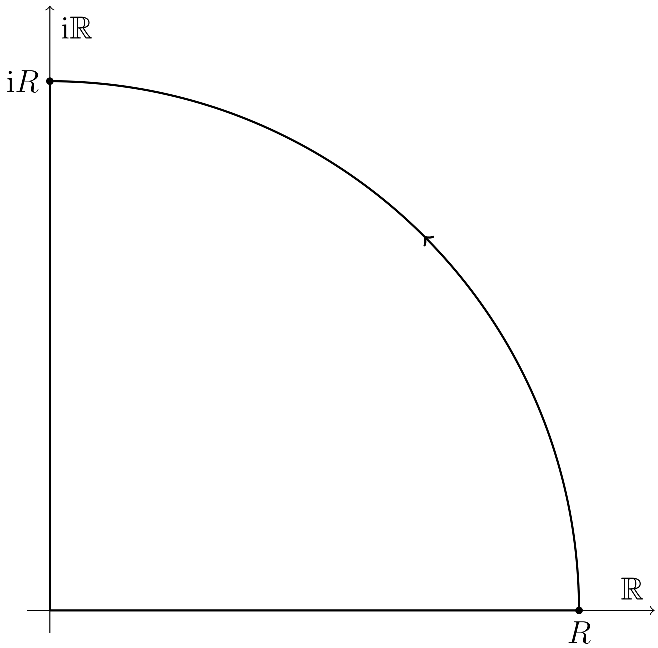

Abbildung 1: Ein Integrationsweg.

Aufgabe 2 [9 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische, ungerade Funktion, die durch

$$f(x) = x(\pi - x),$$

für $0 \leq x \leq \pi$, gegeben ist.

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(b) [6 Punkte] Berechnen Sie die Fourier-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

von f.

(c) [2 Punkte] Benutzen Sie (b), um die Reihe

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots$$

zu berechnen.

Aufgabe 3 [6 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, deren Fouriertransformierte existiert und durch

$$\widehat{f}(y) = \frac{y}{y^4+1}$$

gegeben ist. Berechnen Sie:

(a) [3 Punkte] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) [3 Punkte] $f'(0)$

Hinweis: Sie können bei Aufgabe (b) die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^4+1}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

verwenden *ohne* diese zu beweisen.

Fragen [15 Punkte]

(a) [3 Punkte] Sie werden von jüngeren Mitstudierenden gefragt was $\mathrm{i}^{\sqrt{2}}$ ist. Erklären Sie ausführlich und in eigenen Worten.

Hinweis: Bitten schreiben Sie ganze Sätze.

(b) [3 Punkte] Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{wenn } 0 \le x \le 6, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad g(x) = x^2 - 3ix,$$

und sei $h = f * g$ die Faltung von f mit g. Berechnen Sie $h(4)$.

Hinweis: Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Laplacetransformation der Funktion $\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)$.

Hinweis: Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(d) [3 Punkte] Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x+\mathrm{i}y) = \frac{x+2}{x^2+y^2+4x+2} - \mathrm{i}\cdot\frac{y}{x^2+y^2+4x+2}.$$

Ist f holomorph? Begründen Sie.

(e) [3 Punkte] Sei $f(z) := \cos(1-\cos(z))$. Berechnen Sie a_4 und a_5 in der Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Hinweis: Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.