Prof. Dr. P. S. Jossen Februar 2019

Komplexe Analysis

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (10 Blätter) *eigene, handschriftliche* Notizen.
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht mit der vollen Punktezahl bewertet!

		Note
Name		
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Komplexe Analysis	
Datum	04.02.2019	

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Fragen	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen.
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn die Assistierenden das Signal dazu geben!**

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 [9 Punkte] Sei $c > 0$ eine positive reele Zahl. Berechnen Sie das definite Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Begründen Sie dabei alle Rechenschritte.

Aufgabe 2 [9 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische, gerade Funktion, die durch

$$f(x) = x^2,$$

für $0 \leq x \leq \pi$, gegeben ist.

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(b) [6 Punkte] Berechnen Sie die Fourier-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$$

von f.

(c) [2 Punkte] Benutzen Sie (b), um die Reihe

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

zu berechnen.

Aufgabe 3 [6 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion deren Fouriertransformierte existiert und durch

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{y^8+8}$$

gegeben ist. Berechnen Sie:

(a) [3 Punkte] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} f''(x)\,\mathrm{d}x$

(b) [3 Punkte] $f''(0)$

Hinweis: Mit dem Residuensatz lässt sich zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^8+8}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{2}} - 2} \cdot \pi$$

gilt.

Fragen [12 Punkte]

(a) [3 Punkte] Erklären Sie in eigenen Worten was der Ausdruck $(\sqrt{2})^{\mathrm{i}}$ bedeutet. Falls das möglich ist, bestimmen Sie reelle Zahlen a und b mit $(\sqrt{2})^{\mathrm{i}} = a + b\mathrm{i}$.

(b) [3 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $g = f * f$ die Faltung von f mit sich selbst und $h = g * f$. Berechnen Sie $h(\frac{1}{3})$.

Hinweis: Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die inverse Laplacetransformation der Funktion $F(s) = \frac{2s+5}{(2s-3)(2s+1)^2}$. Aus einer Tafel für Laplacetransformationen entnehmen Sie:

Funktion $f(t)$	Laplacetransformierte $\mathcal{L}(f)(s)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Hinweis: Bei dieser Frage reicht es das Resultat anzugeben, um die volle Punktezahl zu erreichen.

(d) [3 Punkte] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x+\mathrm{i}y) = \frac{e^x y \sin(y)}{x^2+y^2} + \frac{e^x x \cos(y)}{x^2+y^2} + \frac{\mathrm{i}e^x x \sin(y)}{x^2+y^2} - \frac{\mathrm{i}e^x y \cos(y)}{x^2+y^2}.$$

Ist die Funktion f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?