GRUNDLAGEN: AUSSAGEN- UND PRÄDIKATENLOGIK UND BEWEISTECHNIK

THOMAS WILLWACHER

Wir wollen der Vorlesung die Diskussion einiger Grundbegriffe und Techniken der Mathematik voranstellen. In diesem Skript sollen Grundbegriffe der Logik, und grundlegende Beweistechniken diskutiert werden, in Ergänzung zum in der Vorlesung benutzten Buch von Fischer. Der Fokus liegt dabei auf dem Erlernen der von Mathematikern und in der Vorlesung verwendeten Sprache. Für eine vertiefte Diskussion der Logik, oder auch der philosophischen Grundlegungen der Mathematik sei auf andere Vorlesungen verwiesen.

Wir werden voraussetzen, dass aus der Mittelschule folgende Begriffe und mathematische Objekte bekannt sind:

(1) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Wir verwenden auch die Notation $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
(2) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
(3) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. (s. Analysis I)
(4) Die rellen Zahlen $\mathbb{R}$. (s. Analysis I)
(5) Die Grundrechenoperationen $+, -, \cdot, :$, sofern definiert.
(6) Elementare Rechenregeln.

1. Aussagenlogik

Eine Aussage (im Sinne der klassischen Aussagenlogik) ist ein Satz der entweder *wahr* oder *falsch* ist, insbesondere also nie wahr und falsch zugleich.

Beispiel 1.1.

- Die Aussage
$$A : \text{5 ist grösser als 3.}$$
ist wahr.
- Die Aussage
$$B : \text{3 ist grösser als 5.}$$
ist falsch.

Mathematische Aussagen können mit Hilfe von logischen Verknüpfungen zu neuen Aussagen zusammengesetzt werden.

- Negation: Die Aussage $\neg A$ ("nicht A") ist wahr genau dann wenn die Aussage A falsch ist.
- Konjunktion: Die Aussage $A \wedge B$ ("A und B") ist wahr genau dann wenn sowohl A als auch B wahr sind.
- Disjunktion: Die Aussage $A \vee B$ ("A oder B") ist wahr genau dann wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr sind.
- Äquivalenz: Die Aussage $A \leftrightarrow B$ ("A ist äquivalent zu B" oder "A genau dann wenn B") ist genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind, oder beide falsch sind.

- Implikation: Die Aussage $A \to B$ ("A impliziert B" oder "wenn A dann B") ist wahr genau dann wenn A falsch oder B wahr ist.

Zu beachten ist noch, dass die Aussage "entweder A oder B" (ausschliesendes oder, xor) genau dann wahr ist, wenn A oder B wahr sind, aber nicht beide zugleich. In obiger Schreibweise ist dies $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.

Den Effekt von logischen Verknüpfungen kann man einfach in einer Wahrheitstabelle zusammenfassen. Für die Operationen oben sehen diese wie folgt aus, wobei w für wahr und f für falsch steht.

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	f	w
f	f	f	f	w	w

Bemerkung 1.2. Man verwendet für mathematische Folgerungen in Beweisen $\Rightarrow$ statt $\to$ und $\Leftrightarrow$ statt $\leftrightarrow$, wobei man die jeweils letzteren Symbole für die entsprechende Boolesche Funktion reserviert. (Wir werden dies pragmatisch handhaben.)

Bemerkung 1.3. In zusammengesetzten Aussagen hat die Negation $\neg$ stärkere Bindungskraft als "und" und "oder" $\wedge, \vee$, und diese haben wiederum stärkere Bindungkraft als $\to, \leftrightarrow$.

Es gelten eine Reihe von Rechenregeln für die obigen logischen Verknüpfungen. Hier seien einige aufgeführt, wir verweisen auf die Übungen für weitere Beispiele.

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \wedge C &\Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) && \text{(Assoziativität)} \\
(A \vee B) \vee C &\Leftrightarrow A \vee (B \vee C) && \text{(Assoziativität)} \\
A \wedge B &\Leftrightarrow B \wedge A && \text{(Kommutativität)} \\
A \vee B &\Leftrightarrow B \vee A && \text{(Kommutativität)} \\
A \wedge w &\Leftrightarrow A && \\
\neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B && \text{(de Morgan)} \\
\neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B && \text{(de Morgan)} \\
(A \to B) &\Leftrightarrow (\neg B \to \neg A) &&
\end{aligned}
$$

2. Prädikatenlogik

Allgemeiner können Aussagen auch von einem oder mehreren Parametern ("Leerstellen") abhängen. Betrachte z. B.

$$
\begin{aligned}
A(x) &: x \text{ ist grösser als } 3 \\
B(x, y) &: x \geq y.
\end{aligned}
$$

Dann ist die Aussage $A(5)$ wahr und die Aussage $A(2)$ falsch, ebenso wie $B(5, 2)$. Solche Aussagen mit Leerstellen (Prädikate) können dann durch die *Quantoren* $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor) zu neuen Aussagen zusammengefügt werden.

- Die Aussage $\exists x : A(x)$ bedeutet "es existiert (mindestens) ein x, so dass $A(x)$ wahr ist".
- Die Aussage $\exists! x : A(x)$ bedeutet "es existiert genau ein x, so dass $A(x)$ wahr ist".
- Die Aussage $\forall x : A(x)$ bedeutet "für alle x ist $A(x)$ wahr".

Man kann dabei den Parameter x auch auf eine bestimmte Menge einschränken. So bedeutet zum Beispiel

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 1$$

"für alle natürlichen Zahlen x gilt, dass x grösser oder gleich 1 ist". (Diese Aussage ist wahr.) Mann kann auch über mehrere Parameter gleichzeitig quantifizieren. Zum Beispiel bedeutet

$$\exists x, y \in \mathbb{N} : x \geq y$$

"es existieren zwei natürliche Zahlen x und y, so dass x grösser oder gleich y ist". Dies ist also gleichbedeutend mit $\exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \geq y$.

Wiederum gelten einige Rechenregeln für die Manipulation von Ausdrücken mit Quantoren, exemplarisch:

$$\begin{aligned}
\forall x : \forall y : A(x,y) &\Leftrightarrow \forall y : \forall x : A(x,y) \Leftrightarrow \forall x, y : A(x,y) \\
\exists x : \exists y : A(x,y) &\Leftrightarrow \exists y : \exists x : A(x,y) \Leftrightarrow \exists x, y : A(x,y) \\
\neg(\forall x : A(x)) &\Leftrightarrow \exists x : \neg A(x) \\
\neg(\exists x : A(x)) &\Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)\,.
\end{aligned}$$

3. Beweistechniken

Generell kann man leider (oder zum Glück für einen Mathematiker) keinen allgemeinen Algorithmus angeben, nach dem man einen Beweis für eine Vermutung finden kann – man braucht oft eine Idee und Erfahrung. Es gibt allerdings wiederkehrende Tricks, die wir anwenden werden. Zwei davon sollen hier kurz erläutert werden.

3.1. **Widerspruchsbeweise.** Sei unser Ziel die Aussage B aus der Aussage A (Voraussetzungen) herzuleiten, wir wollen also zeigen $A \Rightarrow B$. Beim Widerspruchsbeweis (auch indirekter Beweis oder reductio ad absurdum) nimmt man an, dass $\neg B$ gilt und folgert $\neg A$. Man zeigt also $\neg B \Rightarrow \neg A$ (Kontrapositiv), was nach den Rechenregeln der Aussagenlogik eine äquivalente Aussage ist. Insbesondere für den Fall ohne Voraussetzungen ist $A =$ wahr, und man zeigt beim Widerspruchsbeweis $\neg B \Rightarrow$ falsch, also man leitet aus $\neg B$ einen es falsch bekannte Aussage her. Am einfachsten ist dies wohl an einem Beispiel zu verstehen.

Beispiel 3.1. Wir wollen beispielhaft folgende (einfache) Aussage beweisen.

Sei x eine natürliche Zahl. Ist x^2 gerade, so ist auch x gerade.

Wir haben hier also, für eine gegebene Zahl $x \in \mathbb{N}$, A : x^2gerade und B : x gerade und wir wollen zeigen $A \Rightarrow B$. Wir führen einen indirekten Beweis und zeigen stattdessen $\neg B \Rightarrow \neg A$. Wir nehmen also an, x sei ungerade, also $x = 2a + 1$ für ein $a \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$x^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 4(a^2 + a) + 1,$$

ungerade, da $4(a^2 + a) = 2 \cdot 2(a^2 + a)$ gerade ist. Also sind wir fertig.

Bemerkung 3.2. Anfänger stellen sich oft die Frage, welche Tatsachen in einem Beweis verwendet werden dürfen und welche noch bewiesen werden müssen. Muss z.B. oben erst noch bewiesen werden, dass jede ungerade Zahl geschrieben werden kann als $2a + 1$, oder die binomischen Formeln? Streng genommen ja. Puristisch könnte man sagen, dass alle Beweise letzendlich nur ein gewähltes Axiomensystem (z.B. der Mengenlehre) verwenden dürfen und keine weiteren Tatsachen als bekannt vorausgesetzt werden. Dies ist aber in der Praxis vollkommen unpraktikabel, ausser eventuell bei einfachen Übungsaufgaben, da dann selbst "kleine" Beweise sehr lang und unverständlich werden würden. Wir wieder hier wieder pragmatisch und "mit gesundem Menschenverstand" vorgehen, und z.B. elementare Rechenregeln einfach als gegeben voraussetzen. Zum Teil werden diese noch in anderen Vorlesungen bewiesen, so z.B. die Rechenregeln für reelle Zahlen in der Analysis I, mit Einführung derselben.

3.2. **Vollständige Induktion.** Unser Ziel sei, die Aussagen $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, also $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$. Bei der Methode der vollständigen Induktion erreicht man dies durch zeigen der folgenden beiden Aussagen:

I. **Induktionsverankerung:** Zuerst zeigt man $A(1)$.
II. **Induktionsschritt (/-schluss):** Dann zeigt man $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle n. Hierbei nennt man $A(n)$ die Induktionsannahme.

Es ist klar, dass somit jedes $A(n)$ folgt, da wir gezeigt haben

$$\text{wahr} \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow A(n-1) \Rightarrow A(n).$$

Wir wollen dies anhand einiger Beispiele erklären.

Beispiel 3.3. Die Aussage $A(n)$ sei, dass folgende Formel gilt:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion wie folgt.

I. Induktionsverankerung: Die Aussage $A(1) : 1 = 1$ ist offensichtlich wahr.
II. Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Formel (1) für ein festes n gilt, und wir wollen sie für $n + 1$ (statt n) zeigen. Wir berechnen also

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Hierbei haben wir für die 2. Gleichheit die Induktionsannahme $A(n)$ verwendet.

Beispiel 3.4. Die geometrische Summenformel besagt, dass für $x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{2}$$

Wir beweisen dies wieder mit vollständiger Induktion.

I Induktionsverankerung: Für $n = 1$ ist die Formel offensichtlich wahr $(1 = 1)$.
II Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Formel (2) für ein festes n gilt, und wir wollen sie für $n + 1$ (statt n) zeigen. Wir berechnen also

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1} = \underbrace{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}_{=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Hierbei haben wir wieder für die 2. Gleichheit die Induktionsannahme verwendet.

Die vollständige Induktion kommt oft auch in Varianten vor, z.B.:

- Im Induktionsschritt kann man statt der Induktionsannahme $A(n)$ auch annehmen, dass alle $A(1), A(2), \ldots, A(n)$ gelten, diese hat man ja zu diesem "Zeitpunkt" schon bewiesen.
- Angenommen wir wollen $A(n)$ zeigen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ fest ist (z.B. $N = 7$). Dann kann man natürlich einfach in der Verankerung $A(N)$ zeigen, und im Induktionsschritt zusätzlich annehmen, dass $n \geq N$.

Eine weitere Variante des Prinzips der vollständigen Induktion ist die rekursive Definition. Das Ziel ist, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $f(n) \in X$ einer Menge X zu konstruieren. Man geht dazu wie folgt vor:

I. Man definiert $f(1) \in X$.
II. Man konstruiert $f(n+1)$ aus $f(1), f(2), \dots, f(n)$ für alle n.

Beispiel 3.5. Als Beispiel betrachten wir die rekursive Definition der Potenzen einer Zahl x. Wir definieren zunächst $x^1 = x$. Danach definiert man rekursiv $x^{n+1} = x \cdot x^n$, wobei man hier x^n als bekannt voraussetzt.

3.3. **Fakultät und Binomialkoeffizienten.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{j=1}^{n} j.$$

Es gilt offensichtlich

$$(n+1)! = n!(n+1).$$

Damit dies auch für $n = 0$ gilt setzten wir zusätzlich[1]

$$0! := 1.$$

In der Kombinatorik tritt die Fakultät wie folgt auf.

Satz 3.6. *Die Anzahl Anordnungen von n verschiedenen Elementen ist* $n!$.

Seien die Elemente bezeichnet mit $1, 2, \dots, n$. Dann sind z.B. für $n = 3$ die möglichen Anordnungen

$$123, 231, 312, 321, 213, 132,$$

es gibt also $3! = 6$ viele.

Beweis vom Satz. Es gibt es n Möglichkeiten, dass erste Element in der Anordnung zu wählen $(n-1)$ das zweite zu wählen, $(n-2)$ das dritte zu wählen, etc. Insgesamt gibt es also $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ mögliche Anordnungen. □

Wir definieren als nächstes die *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} \overset{\text{für } n \geq k \geq 1}{=} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

für ganze Zahlen k, n mit $0 \leq k \leq n$. Diese sind wie folgt wichtig.

Satz 3.7. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist* $\binom{n}{k}$, *sofern* $0 \leq k \leq n$.

Zum Beispiel hat die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ mit $n = 4$ Elementen genau die folgenden 2-elementigen Teilmengen

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

Es gibt also $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ viele.

[1] Schreibt man in einer Formel ":=" statt "=", so betont man, dass die Gleichheit per Definition gilt, und nicht hergeleitet werden muss. Man liest also := als "ist per Definition gleich".

Beweis vom Satz. Für $k = 0$ gibt es nur die leere Menge als mögliche Teilmenge. Andererseits ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!} = 1$.

Sei nun $k \neq 0$. Wir wählen zunächst nacheinander k Elemente aus. Dann gibt es n Möglichkeiten für das erste Element, $n-1$ für das zweite etc., und $n-k+1$ für das k-te, also insgesamt $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ Möglichkeiten. Wir erhalten dadurch allerdings die gleiche Teilmenge für jede Reihenfolge der Elemente der Teilmenge. Wir müssen nach dem vorangegangenen Satz folglich noch durch $k!$ dividieren, und erhalten so die angegebene Formel. □

Der Name der Binomialkoeffizienten leitet sich aus folgendem Satz her.

Satz 3.8 (Binomialentwicklung)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j. \tag{3}$$

Beweis. Wir zeigen dies mit vollständiger Induktion.

I. Verankerung: Für $n = 1$ ist die Formel offensichtlich wahr ($1 + x = 1 + x$).

II. Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Formel für ein festes n gilt, und wir wollen sie für $n + 1$ (statt n) zeigen. Wir berechnen also, unter Benutzung der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x^j + x^{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right)x^j + x^{n+1}.\end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} &= \frac{n!}{(n-j)!j!} + \frac{n!}{(n-j+1)!(j-1)!} = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{n-j+1}\right) \\ &= \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}\left(\frac{n-j+1+j}{j(n-j+1)}\right) = \frac{(n+1)!}{(n-j+1)!j!} = \binom{n+1}{j}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.9.

- Die Formel (3) gilt auch für $n = 0$, wobei man die 0-te Potenz einer Zahl als 1 definiert.
- Als Übung zeige man, dass die folgende Verallgemeinerung von (3) gilt, für zwei Zahlen x und y.

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j} = y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + x^n.$$

- Die letzte Formel im Beweis, $\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}$ ist auch als Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten von unabhängigem Interesse.

Department of Mathematics, ETH Zurich, Rämistrasse 101, 8092 Zurich, Switzerland
Email address: thomas.willwacher@math.ethz.ch