2×2 Determinanten und die Fläche eines Paralellograms

In diesem Abschnitt betrachen wir die Elemente aus $\mathbb{R}^2$ als Zeilenvektoren. Wir definieren zuerst die folgende zwei Funktion von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Erstens

$$\text{die Fläche}\, A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u, v) \mapsto A(u, v)$$

wobei $A(u, v)$ die Fläche des von u und v aufgespannten Parallelogramms ist. Beachte, dass $A(u, \lambda v) = |\lambda| \cdot A(u, v) = A(\lambda u, v)$ und $A(u, \lambda u) = 0$. Und zweitens die Orientierung für jede geordnete Basis $\mathcal{B} = (u, v)$

$$\text{die Orientierung}\, O : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u, v) \mapsto O(u, v) := \frac{\det(u, v)}{|\det(u, v)|}$$

wobei gilt $O(u, v) = \pm 1$ und wir die Definition der Determinante aus der Vorlesung verwenden, d.h.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Zur Vollständigkeit setzen wir $O(u, v) = 0$ wenn u und v linear abhängig sind. Nun können wir eine weitere Funktion definieren

$$OA : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u, v) \mapsto OA(u, v) := O(u, v) \cdot A(u, v)$$

Wir werden hier zeigen, dass diese neue Funktion nichts anderes ist als die Determinante und verwenden dabei Theorem 2, §4.1. aus der Vorlesung.

Proposition *Sei $\mathcal{B} = (u, v)$ eine geordnete Basis für $\mathbb{R}^2$ so gilt $OA(u, v) = \det(u, v)$ und daraus folgt direkt, dass $A(u, v) = |\det(u, v)|$.*

Beweis: Die Idee des Beweises ist zu zeigen, dass die Funktion OA die Eigentschaften aus Theorem 2, §4.1, erfüllt und somit gleich sein muss zu der Determinante.

i) Wir zeigen zuerst, dass $OA(u, \lambda v) = \lambda \cdot OA(u, v)$. Wenn $\lambda = 0$ ist die Gleichung klar, also nehmen wir an, dass $\lambda \neq 0$, so gilt

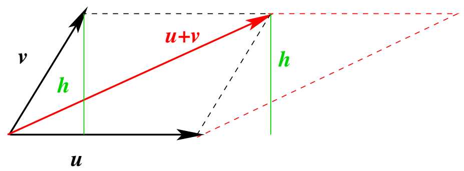
$$OA(u, \lambda v) = \frac{\det(u, \lambda v)}{|\det(u, \lambda v)|} A(u, \lambda v) = \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} O(u, v) \right) \cdot |\lambda| \cdot A(u, v) = \lambda \cdot OA(u, v)$$

Genauso kann man zeigen, dass $OA(\lambda u, v) = \lambda \cdot OA(u, v)$.

ii) Zunächst zeigen wir, dass $OA(u, \lambda u + \mu v) = \mu \cdot OA(u, v)$. Falls $\lambda = 0$ so gilt

$$OA(u, \lambda u + \mu v) = OA(u, \mu v) \overset{i)}{=} \mu \cdot OA(u, v)$$

Die untenstehende Figur zeigt, dass $A(u, v) = A(u, u + v)$ weil die beide Parallelogramme die gleiche Basis (u) und die gleiche Höhe haben.



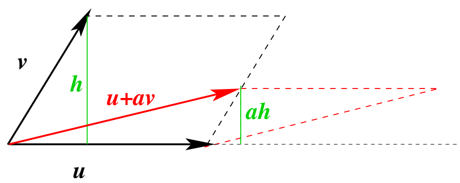
Nehmen wir nun an, dass $\lambda \neq 0$, so gilt

$$OA(u, \lambda u + \mu v) \overset{i)}{=} \lambda \cdot OA(u, u + \frac{\mu}{\lambda} v) = \lambda \cdot \frac{\mu}{\lambda} \cdot OA(u, v) = \mu \cdot OA(u, v)$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt, da einerseits

$$\det(u, u + \frac{\mu}{\lambda} v) = \det(u, u) + \det(u, \frac{\mu}{\lambda} v) = 0 + \frac{\mu}{\lambda} \det(u, v)$$

und anderseits die Fläche vom Parallelogramm aufgespannt von u und $u + \frac{\mu}{\lambda} v$ ist das $|\frac{\mu}{\lambda}|$-fache von der Fläche des Parallelogramms aufgespannt von u und v - da die Basen gleich sind und die Höhe das $|\frac{\mu}{\lambda}|$-fache der alten Höhe ist (siehe Figur unten).



iii) Schlussendlich zeigen wir, dass $OA(u, v_1 + v_2) = OA(u, v_1) + OA(u, v_2)$ für beliebige $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Da das Resultat klar ist, wenn $u = 0$, nehmen wir an, dass $u \neq 0$ und wählen eine Basis $\mathcal{B} = (u, v)$, so dass wir schreiben können $v_i = \lambda_i u + \mu_i v$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} OA(u, v_1 + v_2) &= OA\left(u, (\lambda_1 + \lambda_2) u + (\mu_1 + \mu_2) v\right) \\ &\overset{ii)}{=} (\mu_1 + \mu_2) \cdot OA(u, v) \\ &= \mu_1 \cdot OA(u, v) + \mu_2 \cdot OA(u, v) \\ &\overset{i)}{=} OA(u, \mu_1 v) + OA(u, \mu_2 v) \\ &\overset{ii)}{=} OA(u, \lambda_1 u + \mu_1 v) + OA(u, \lambda_2 u + \mu_2 v) \\ &= OA(u, v_1) + OA(u, v_2) \end{aligned}$$

und somit ist die Funktion OA linear in der zweiten Zeile. Analog zeigt man, dass sie linear in der ersten Zeile ist.

iv) Nun bleibt noch die beide andere Eigenschaften zu zeigen. Erstens gilt nach Definition

$$OA(u,u) = O(u,u) \cdot A(u,u) = 0 \cdot 0 = 0$$

Andeseit gilt, da die Vektoren e_1 und e_2 das Einheitsquadrat aufspannen

$$OA(e_1,e_2) = O(e_1,e_2) \cdot A(e_1,e_2) = \frac{\det(I_2)}{|\det(I_2)|} \cdot A(e_1,e_2) = 1$$

Und somit erfüllt die Funktion OA alle Eigentschaften aus Theorem 2 und es muss also gelten, dass

$$OA(u,v) = \det(u,v)$$

.

■