

Beispiel zur Gausselimination

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Und die dazu gehörende erweiterte Matrix

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{?} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{?}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{?} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{?}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{?} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{?}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{?} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Damit haben wir das vereinfachte lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

und somit die allgemeine Lösung

$$x_1 = 1 - t, x_2 = 2, x_3 = t, x_4 = 3.$$