Theorem. *Seien $A, B, C \subset U$, so gilt*

- *i)* $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativitätsgesetze)*
- *ii)* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(Assoziativitätsgesetze)*
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- *iii)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Distributivitätsgesetze)*
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- *iv)* $A \cup (B \cap A) = A$, $A \cap (B \cup A) = A$ *(Verschmelzungsgesetze)*
- *v)* $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ *(Idempotenzgesetze)*
- *vi)* $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$ *(Neutralitätsgesetze)*
- *vii)* $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ *(Absorptionsgesetze)*
- *viii)* $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$ *(Komplementaritätsgesetze)*
- *ix)* $\emptyset^c = U$, $U^c = \emptyset$ *(Dualitätsgesetze)*
- *x)* $(A^c)^c = A$ *(Doppelkomplementsgesetz)*
- *xi)* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *(Gesetze von De Morgan)*

Proposition. *Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. $\forall a, b \in M$*

$$Ca \cap Cb \neq \emptyset \Leftrightarrow Ca = Cb$$

Definition. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.*

- *i)* *f ist* injektiv*, wenn $x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.*
- *ii)* *f ist* surjektiv*, wenn $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$.*
- *iii)* *f ist* bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.*

Theorem. *In jeder Gruppe $(G, \circ, e)$ gilt:*

- *i) Jedes linksneutrale Element ist rechtsneutral, d.h. $\forall a \in G : a \circ e = a$.*
- *ii) Jedes zu $a \in G$ linksinverse Element $a' \in G$ ist rechtsinvers, d.h. $a \circ a' = e$.*
- *iii) Das neutrale Element ist eindeutig.*
- *iv) Zu jedem $a \in G$ ist das inverse Element $a^{-1} \in G$ eindeutig.*
- *v)* $\forall a \in G : (a^{-1})^{-1} = a$.
- *vi)* $\forall a, b \in G : (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.
- *vii)* $\forall a, b \in G \exists! x \in G : a \circ x = b$.
- *viii)* $\forall a, b \in G \exists! y \in G : y \circ a = b$.
- *ix)* $\forall a, b, c \in G : b = c \Leftrightarrow a \circ b = a \circ c$.
- *x)* $\forall a, b, c \in G : b = c \Leftrightarrow b \circ a = c \circ a$.

Definition. (Ring und Körper) *Ein Körper erfüllt (KR0-10), ein Ring erfüllt (KR0-KR5, KR8), ein unitärer Ring erfüllt zusätzlich (KR6) und (KR9), ein kommutativer Ring erfüllt zusätzlich (KR10):*
(KR0: Die Körper-/Ringoperationen sind abgeschlossen.)
KR1: $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x + (y + z) = (x + y) + z$ *(Assoziativität)*
KR2: $\forall x, y \in \mathbb{K} : x + y = y + x$ *(Kommutativität)*
KR3: $\exists 0 \in \mathbb{K} \forall x \in \mathbb{K} : 0 + x = x$ *(Neutrales Element der Addition)*
KR4: $\forall x \in \mathbb{K} \exists x' \in \mathbb{K} : x + x' = 0$ *(Additives Inverses)*
KR5: $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(Assoziativität der Multiplikation)*
KR6: $\exists 1 \in \mathbb{K} \forall x \in \mathbb{K} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ *(Neutrales Element der Multiplikation)*
KR7: $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists x' \in \mathbb{K} : x' \cdot x = 1$ *(Inverses der Multiplikation)*
KR8: $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x(y + z) = xy + xz,\ (x + y)z = xz + yz$ *(Distributivität)*
KR9: $1 \neq 0$ *(Nichttrivialität)*
KR10: $\forall x, y \in \mathbb{K} : x \cdot y = y \cdot x$ *(Kommutativität der Multiplikation)*

Definition. *Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung (Addition genannt)*

$$+ : V \times V \to V; (u, v) \mapsto u + v$$

und einer äusseren Verknüpfung (Multiplikation genannt)

$$\cdot : K \times V \to V; (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

heisst ein Vektorraum über K wenn folgende Vektorraumaxiome gelten:

(V1) $\forall u, v \in V : u + v = v + u$

(V2) $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$

(V3) $\exists\, 0_V \in V\, \forall u \in V : 0_V + u = u$

(V4) $\forall u \in V\, \exists\, v \in V : u + v = 0_V$

(V5) $\forall u \in V : 1 \cdot u = u$

(V6) $\forall \lambda, \mu \in K\, \forall u \in V : (\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

(V7) $\forall \lambda \in K\, \forall u, v \in V : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

(V8) $\forall \lambda, \mu \in K\, \forall u \in V : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Theorem. *Sei V ein Vektorraum über K und $W \subset V$ eine Teilmenge. W ist ein Unterraum von V dann und nur dann, wenn folgendes gilt:*

i) $0 \in W$.

ii) $\forall u, v \in W : u + v \in W$.

iii) $\forall u \in W \forall \lambda \in K : \lambda \cdot u \in W$.

Definition. *Ein Vektorraum V ist die* direkte Summe *von W_1 und W_2, bezeichnet mit $V = W_1 \oplus W_2$, wenn $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume sind, so dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $W_1 + W_2 = V$.*

Theorem. *Sei $S \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge, so ist die Menge W bestehend aus allen Linearkombinationen der Elemente von S ein Unterraum von V. Zudem ist es der kleinste Unterraum von V, der S enthält, d.h. W ist eine Teilmenge von jedem Unterraum von V, der S enthält.*

Theorem. *Für jede Teilmenge $S \subset V$ sind folgende äquivalent:*

a) S ist linear unabhängig.

b) Kein Element in S ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von S.

c) Jeder Vektor in V besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S.

Theorem. *Sei V ein Vektorraum mit einer endlichen Basis B mit n Elementen. Sei $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig mit $m \leq n$. Dann existiert $S_0 \subset B$ mit $n - m$ Elementen, so dass $\operatorname{span}(S \cup S_0) = V$.*

Lemma. *Gegeben ein endlich-dim. Vektorraum V über K, ein Unterraum $W \subset V$ sowie $v, v_1, v_2 \in V$.*

i) $v + W$ *ist ein Unterraum* $\Leftrightarrow v \in W$.

ii) $v_1 + W = v_2 + W \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$.

Lemma. *Sei V ein Vektorraum, W ein Unterraum. Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von W und seien $\{v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subset V$ so dass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist. Dann ist $\{v_{m+1} + W, \ldots, v_n + W\}$ eine Basis von V/W.*

Bemerkung. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien W, W_1, W_2 Unterräume, dann gelten* $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$ *und* $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

Theorem. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, dann ist*

$$\mathrm{Im(T)} = \operatorname{span}\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei V endlich dimensional. Dann gilt*

$$\operatorname{nullity}(T) + \operatorname{Rang}(T) = \dim V$$

Theorem. *Sei $T : V \to W$ linear und seien $\dim V = \dim W$. Dann ist T injektiv genau dann, wenn T surjektiv ist.*

Definition. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$. Der* Koordinatenvektor *$[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ von v bezüglich $\mathcal{B}$ ist definiert durch*

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definition. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, $T : V \to W$ linear, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ geordnete Basen. Die* Darstellungsmatrix *von T bezüglich $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ist das eindeutige $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ mit*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Wir schreiben $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$. Wenn $V = W$ und $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, dann schreiben wir $[T]_{\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Definition. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ so ist $BA \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$ definiert durch*

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik} A_{kj} \quad \forall 1 \leq i \leq p \forall 1 \leq j \leq n$$

Theorem. *Seien $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$, $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von U, V, W. Dann gilt*

$$[ST]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Theorem. *Seien $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von V, W. Dann gilt für alle $v \in V$*

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}}$$

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ so ist $L_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Seien $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$ die Standardbasen von $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$, dann gelten*

i) $[L_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} = A$

ii) $\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : L_A = L_B \Leftrightarrow A = B$

iii) $\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \forall \lambda \in \mathbb{K} : L_{A+B} = L_A + L_B,\ L_{\lambda A} = \lambda L_A$

iv) $\forall T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \exists! C \in M_{m\times n}$ *so dass* $T = L_C$. *Es gilt* $C = [T]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}$.

v) $\forall E \in M_{n\times p}(\mathbb{K}) : L_{AE} = L_A \circ L_E$

vi) Falls $m = n$, *dann ist* $L_{I_n} = I_{\mathbb{K}^n}$

Theorem. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Sei $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann ist T genau dann invertierbar, wenn $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ invertierbar ist. Des Weiteren gilt $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.*

Definition. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. V und W sind* isomorph *($V \cong W$), falls $\exists T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ so dass T invertierbar ist. Ein invertierbarer Homomorphismus T heisst* Isomorphismus.

Theorem. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit Dimensionen n und m. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ geordnete Basen von V und W. Dann ist Φ ein Isomorphismus, wobei*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{K});\ T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Korollar. $\dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$

Theorem. *Seien V ein Vektorraum und $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ geordnete Basen von V. Sei $Q := [I_V]_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}$. Dann gelten*

i) Q ist invertierbar.

ii) $\forall v \in V : [v]_{\mathcal{B}} = Q[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

Theorem. *Seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ geordnete Basen von V, sowie $Q := [I_V]_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}$. Sei $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, dann gilt $[T]_{\tilde{\mathcal{B}}} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{B}} Q$.*

Definition. *Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann sind A, B* ähnlich, *wenn ein invertierbares $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existiert, so dass $B = Q^{-1}AQ$.*

Theorem. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit geordneter Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und sei $\mathcal{B}^* := (f_1, \ldots, f_n) \in (V^*)^n$, wobei $\{f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ die Koordinatenfunktionen bezüglich $\mathcal{B}$ sind. Dann ist $\mathcal{B}^*$ eine geordnete Basis von V^* und für alle $f \in V^*$ gilt*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i$$

Die Basis $\mathcal{B}^*$ ist die duale Basis *zu $\mathcal{B}$.*

Theorem. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ geordnete Basen von V und W. Sei $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, und $T^* : W^* \to V^*$ definiert durch $T^*(g) := g \circ T$ für alle $g \in W^*$. Dann gilt*

1 $T^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$

2 $[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^T$

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\psi : V \to V^{**}$, $\psi(v) := \mathrm{ev}_v$ mit $\mathrm{ev}_v(f) := f(v)$ ($f \in V^*$) ein Isomorphismus.*

Theorem. *Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $P \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und seien P und Q invertierbar. Dann ist $\mathrm{Rang}(PAQ) = \mathrm{Rang}(A)$.*

Theorem. *Sei $Ax = 0$ ein homogenes System über $\mathbb{K}$ mit m Gleichungen in n Unbekannten. Sei $\mathscr{L}$ die Lösungsmenge des Systems. Dann gilt $\mathscr{L} = \mathrm{Ker}(L_A)$ und somit ist $\mathscr{L}$ ein Unterraum und $\dim \mathscr{L} = n - \mathrm{Rang}(A)$.*

Theorem. *Das System $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b)$.*

Definition. *Eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ist in* Zeilenstufenform, *wenn*

i) *Zeilen mit Einträgen alle gleich null stehen zuunterst.*

ii) *Der erste von null verschiedene Eintrag in einer Zeile (genannt* Pivot*) ist der einzige von null verschiedene Eintrag in der jeweiligen Spalte.*

iii) *Der erste von null verschiedene Eintrag in einer Zeile ist gleich 1 und steht in einer Spalte rechts des ersten von null verschiedenene Eintrags der vorangehenden Zeile.*

Algorithmus. *Um ein LGS von der Form $Ax = b$ in n Unbekannten zu lösen, kann man wie folgt vorgehen:*

(1) *Bilde die erweiterte Matrix $(A \mid b)$*

(2) *Führe $(A \mid b)$ mittels Gauss-Elimination in eine Matrix $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ in Zeilenstufenform über.*

(3) *Existiert eine Zeile mit dem einzigen von null verschiedenen Eintrag in der letzten Spalte, dann besitzt das LGS keine Lösung und der Algorithmus gibt die leere Menge zurück.*

(4) *Partitioniere die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in zwei Gruppen – die $m' := \mathrm{Rang}(A)$ Pivotvariablen und die $n - m'$ nicht-Pivotvariablen – und ersetze die nicht-Pivotvariablen durch neue Variablen $t_1, \ldots, t_{n-m'}$.*

(5) *Lese die allgemeine Lösung s ab:*

$$s = s_0 + t_1 u_1 + \cdots + t_{n-m'} u_{n-m'}$$

Theorem. *Sei $Ax = b$ ein LGS mit m nicht-trivialen Gleichungen in n Unbekannten. Sei $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b)$ und $(A \mid b)$ in Zeilenstufenform. Dann ist*

i) $\mathrm{Rang}(A) = m$

ii) *Sei $s = s_0 + t_1 u_1 + \cdots + t_{n-m} u_{n-m}$ ($t_1, \ldots, t_{n-m} \in \mathbb{K}$) die allgemeine Lösung von $Ax = b$. Dann ist $\{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ eine Basis der Lösungsmenge von $Ax = 0$ und s_0 eine Lösung von $Ax = b$.*

Bemerkung. *Anzahl Lösungen eines LGS:*

- *Eine Lösung: Falls n Gleichungen in n Unbekannten:* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b) = n$. *Oder:* $\det(A) \neq 0$
- *Keine Lösung:* $\mathrm{Rang}(A) \neq \mathrm{Rang}(A|b)$ *($\Rightarrow \det(A) = 0$)*
- *(Falls $|\mathbb{K}| = \infty$) unendlich viele Lösungen:* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b) < n$ *($\Rightarrow \det(A) = 0$)*

Definition. *Sei $\mathcal{B} = (u, v)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$. Die* Orientierung *von $\mathcal{B}$ ist*

$$O(u, v) := \frac{\det\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\left|\det\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right|}$$

Definition. *Eine Abbildung $\delta : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist multilinear, falls sie linear ist in den Zeilen, d.h. für alle Zeilen $A_{(1)}, \dots, A_{(m)}$ sowie $A'_{(i)} \in \mathbb{K}^n$ und für alle $c \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} = c\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix}$$

Definition. *Eine multilineare Abbildung $\delta : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ heisst* alternierend, *falls gilt*

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\exists 1 \le i < m : A_{(i)} = A_{(i+1)}) \Rightarrow \delta(A) = 0$$

Proposition. *Sei $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine alternierende multilineare Abbildung. Sei $1 \le j \le n+1$ und definiere*

$$\forall A \in M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K}) : \, \varepsilon_j(A) := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} A_{ij} \delta(\tilde{A}_{ij})$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die aus A nach Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhaltene Matrix ist. Dann ist $\varepsilon_j : M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinear und alternierend. Falls δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist, so ist ε_j eine Determinante auf $M_{n+1\times n+1}(\mathbb{K})$.

Theorem. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.*

i) Ist B entstanden aus A durch Multiplikation einer Zeile mit $c \in \mathbb{K}$. Dann ist $\delta(B) = c\delta(A)$.

ii) Sind zwei Zeilen von A identisch, dann ist $\delta(A) = 0$.

iii) Ist B entstanden aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, dann ist $\delta(B) = -\delta(A)$.

iv) Sind die Einträge einer Zeile von A alle gleich null, dann ist $\delta(A) = 0$.

v) Ist B entstanden durch Addition eines Vielfachen der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A, wobei $1 \le i, j \le n$ mit $i \ne j$. Dann ist $\delta(B) = \delta(A)$.

Korollar. *Sei δ eine Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann sind folgende äquivalent:*

i) $\delta(A) = 0$

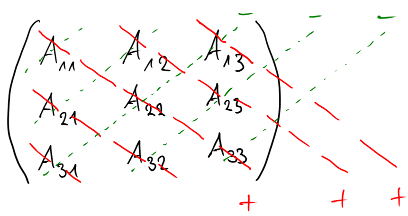
ii) A ist nicht invertierbar

iii) $\mathrm{Rang}(A) < n$

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, seien $1 \le i^*, j^* \le n$, dann ist*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j^*} A_{ij^*} \det(\tilde{A}_{ij^*}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i^*+j} A_{i^*j} \det(\tilde{A}_{i^*j})$$

Bemerkung (Sarrus)**.** *Für $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ ist* $\det(A) = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{32}A_{23}A_{11} - A_{33}A_{21}A_{12}$.



Theorem. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $T, \tilde{T} \in \mathrm{End}(V)$ beliebig. Es gelten:*

i) $\det(I_V) = 1$

ii) $\det(T \circ \tilde{T}) = \det(T)\det(\tilde{T})$

iii) T ist genau dann ein Automorphismus, wenn $\det(T) \ne 0$ und in diesem Fall ist $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$.

iv) Sei $S : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist $\det(S \circ T \circ S^{-1}) = \det(T)$.