Lösung Serie 10:
Elementare Zeilenumformungen & Elementarmatrizen, Rang & Inverse einer Matrix

1. **a)** Sei $w \in \operatorname{Im}(T_1 + T_2)$, dann existiert ein $v \in V$, so dass

$$w = (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \in \operatorname{Im}(T_1) + \operatorname{Im}(T_2)$$

Also ist $\operatorname{Im}(T_1 + T_2) \subset \operatorname{Im}(T_1) + \operatorname{Im}(T_2)$ und folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{Rang}(T_1 + T_2) &= \dim \operatorname{Im}(T_1 + T_2)\\ &\leq \dim \operatorname{Im}(T_1) + \dim \operatorname{Im}(T_2)\\ &= \operatorname{Rang}(T_1) + \operatorname{Rang}(T_2)\end{aligned}$$

b) Wir bemerken zuerst, dass $\operatorname{Im}(S \circ T) = \operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)})$, wobei $S|_{\operatorname{Im}(T)} \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Im}(T), W)$ die Abbildung

$$\forall v \in \operatorname{Im}(T) : \ S|_{\operatorname{Im}(T)}(v) := S(v)$$

sei; d.h. $S|_{\operatorname{Im}(T)}$ ist die Restriktion von S auf den Unterraum $\operatorname{Im}(T) \subset V$.

"$\subset$": Sei $w \in \operatorname{Im}(S \circ T)$, dann ist $w = (S \circ T)(u) = S(T(u))$ für ein $u \in U$ und folglich $w \in \operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)})$.

"$\supset$": Sei $w \in \operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)})$, dann gilt $w = S(v)$ für ein $v \in \operatorname{Im}(T)$. Wegen $v \in \operatorname{Im}(T)$, existiert ein $u \in U$ mit $v = T(u)$ und folglich

$$w = S(T(u)) = (S \circ T)(u) \in \operatorname{Im}(S \circ T)$$

Aus der Diskussion folgt $\operatorname{Rang}(S \circ T) \leq \operatorname{Rang}(S)$, da $\operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}(T)}) \subset \operatorname{Im}(S)$.

Aus der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Rang}(S|_{\operatorname{Im}(T)}) + \operatorname{nullity}(S|_{\operatorname{Im}(T)}) \geq \operatorname{Rang}(S \circ T)$$

und folglich $\operatorname{Rang}(S \circ T) \leq \operatorname{Rang}(T)$.

Beides zusammen liefert

$$\operatorname{Rang}(S \circ T) \leq \min\{\operatorname{Rang}(T), \operatorname{Rang}(S)\}$$

Bitte wenden!

2. Aus der Dimensionsformel folgt, dass

$$n = \dim \mathbb{K}^n = \mathrm{Rang}(L_A) + \mathrm{Ker}(L_A) \geq \mathrm{Rang}(L_A)$$

Da $\mathrm{Im}(L_A)$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^m$ ist, ist

$$\mathrm{Rang}(L_A) = \dim \mathrm{Im}(L_A) \leq \dim \mathbb{K}^m = m$$

und beides zusammen liefert

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(L_A) \leq \min\{m, n\}$$

Für die zweite Aussage machen wir eine Induktion nach m, der Anzahl Zeilen von A.

"$m = 1$": Falls $A = 0$, dann ist $\mathrm{Rang}(L_A) = 0$, da $L_A(v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$ und folglich ist nichts zu zeigen.

Sei also $A \neq 0$, dann existiert ein $1 \leq j \leq n$ mit $A_{1j} \neq 0$. Da $L_A(e_j) = A_{1j} \neq 0$, ist $\mathrm{Rang}(L_A) \geq 1$ und wegen $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist $\mathrm{Rang}(L_A) = 1$.

Falls $j > 1$, vertauschen wir die Spalten $A^{(1)}$ und $A^{(j)}$, so dass wir im Folgenden annehmen können, dass A eine $1 \times n$-Matrix mit $A_{11} \neq 0$ ist. Wir multiplizieren nun die erste Spalte von A mit A_{11}^{-1}, so dass wir im Folgenden annehmen können, dass A eine $1 \times n$-Matrix mit $A_{11} = 1$ ist. Falls $n = 1$, dann sind wir fertig. Andernfalls addieren wir für $j \leq 2 \leq n$ das $-A_{1j}$-fache der ersten Spalte zur j-ten Spalte, so dass danach $A_{1j} = 0$ für $j \geq 2$ und folglich $A = e_1^T$, wie gewünscht.

"$m > 1$": Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \qquad B \in M_{m-1 \times n}(\mathbb{K}), C \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

Sei $r_B := \mathrm{Rang}(B)$. Nach Induktionsannahme existieren elementare Zeilen- und Spaltenumformungen, die A in A' überführen, so dass

$$A' = \begin{pmatrix} D_B \\ C' \end{pmatrix} \qquad D_B \in M_{m-1 \times n}(\mathbb{K}), C' \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

mit D_B eine Diagonalmatrix für B wie in der Aufgabenstellung. Wir addieren nun das $-C'_{1j}$-fache der j-ten Zeile zur m-ten Zeile für $1 \leq j \leq r_B$ und können also annehmen, dass $C'_{1j} = 0$ für $1 \leq j \leq r_B$. Das heisst, wir haben mit elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen A in eine Matrix

$$A'' = \begin{pmatrix} I_{r_B} & 0_{r_B \times (n - r_B)} \\ 0_{(m - r_B - 1) \times r_B} & 0_{(m - r_B - 1) \times (n - r_B)} \\ 0_{1 \times r_B} & C'' \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

überführt, wobei $C'' \in M_{1\times(n-r_B)}(\mathbb{K})$. Da elementare Zeilen- und Spaltenumformungen den Rang erhalten, gilt $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A'')$.

Da die Spalten $(A'')^{(j)}$ für $1 \leq j \leq r_B$ linear unabhängig sind, gilt $\operatorname{Rang}(A'') \geq r_B$. Andererseits sind die Spalten $(A'')^{(j)}$ für $r_{B+1} \leq j \leq n$ sicherlich linear abhängig, da sie allesamt Vielfache des Vektors $e_m \in \mathcal{E}_m$ sind. Also ist $\operatorname{Rang}(A) \in \{r_B, r_B + 1\}$.

Angenommen $\operatorname{Rang}(A) = r_B$, dann ist $\dim \operatorname{Im}(L_{A''}) = r_B$ und folglich ist $C'' = 0_{1\times(n-r_B)}$ und A'' hat die gewünschte Form.

Falls $\operatorname{Rang}(A) = r_B + 1$, dann existiert ein $r_B < j \leq n$, so dass $C''_{1j} \neq 0$. Nach vertauschen der j-ten und der $(r_B + 1)$-ten Spalten von A'' können wir annehmen, dass $C''_{1(r_B+1)} \neq 0$. Wir multiplizieren die $(r_B + 1)$-te Spalte von A'' mit $(C''_{1(r_B+1)})^{-1}$ und können im Folgenden annehmen, dass $C''_{1(r_B+1)} = 1$. Nun addieren wir für $1 < j \leq r_B - n$ das $-C''_{1(r_B+j)}$-fache der $(r_B + 1)$-ten Spalte von A'' zur $(r_B + j)$-ten Spalte von A'' und erhalten aus A'' mittels elementarer Spaltenumformungen eine Matrix A''' von der Form

$$A'' = \begin{pmatrix} I_{r_B} & 0_{r_B\times(n-r_B)} \\ 0_{(m-r_B-1)\times r_B} & 0_{(m-r_B-1)\times(n-r_B)} \\ 0_{1\times r_B} & e_1^T \end{pmatrix} \quad (e_1 \in \mathcal{E}_{n-r_B})$$

Nach vertauschen der $(r_B + 1)$-ten Zeile und der m-ten Zeile von A''' erhalten wir eine Matrix

$$D = \begin{pmatrix} I_{r_B+1} & 0_{(r_B+1)\times(n-(r_B+1))} \\ 0_{(m-(r_B+1))\times(r_B+1)} & 0_{(m-(r_B+1))\times(n-(r_B+1))} \end{pmatrix}$$

wie gewünscht.

3. Wir erinnern daran, dass $L_{FAG} = L_F \circ L_A \circ L_G$ und dass wegen der Invertierbarkeit von F und G auch L_F und L_G invertierbar, und also bijektiv sind.

a) Wegen der Invertierbarkeit von L_F ist $\operatorname{Ker}(L_F) = \{0\}$, und folglich

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Ker}(L_{FAG}) &\Leftrightarrow 0 = L_{FAG}(v) = L_F\big((L_A \circ L_G)(v)\big) \\ &\Leftrightarrow 0 = (L_A \circ L_G)(v) = L_A\big(L_G(v)\big) \\ &\Leftrightarrow L_G(v) \in \operatorname{Ker}(L_A) \\ &\Leftrightarrow v \in L_G^{-1}\big(\operatorname{Ker}(L_A)\big) \end{aligned}$$

und folglich $\operatorname{Ker}(L_A) = L_G\big(\operatorname{Ker}(L_{FAG})\big)$.

Für die Aussage über das Bild verwenden wir die Surjektivität von L_G^{-1}:

$$w \in \operatorname{Im}(L_{FAG}) \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathbb{K}^n :\ w = L_{FAG}(v_1)$$

Bitte wenden!

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \exists v_2 \in \mathbb{K}^n : \ w = L_{FAG}\big(L_G^{-1}(v_2)\big) = L_F\big(L_A(v_2))\\&\Leftrightarrow w \in L_F\big(\mathrm{Im}(L_A)\big)\end{aligned}$$

und folglich $\mathrm{Im}(L_A) = L_F^{-1}\big(\mathrm{Im}(L_{FAG})\big) = L_{F^{-1}}\big(\mathrm{Im}(L_{FAG})\big)$.

b) Um unsere Vorgehensweise zu motivieren, bemerken wir, dass das Bild von L_A gegeben ist durch die lineare Hülle der Spalten von A

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$$

Dies haben wir im Rahmen der Diskussion linearer Abbildung ausführlich besprochen. Um eine Basis von $\mathrm{Im}(L_A)$ zu bestimmen, müssten wir eine maximale, linear Unabhängige Teilmenge des obigen Erzeugendensystem suchen, was mit probieren im Allgemeinen nicht einfach ist. Darum verwenden wir stattdessen Teilaufgabe (a) und das Resultat aus Aufgabe 2, d.h. wir finden Produkte $\tilde{F}, \tilde{G}$ von Elementarmatrizen, so dass $\tilde{F}D\tilde{G} = A$ mit D wie in Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}2&1&-1&2\\1&0&-1&0\\3&1&-2&2\end{pmatrix}\\
&= \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=:F_1} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\2&1&-1&2\\3&1&-2&2\end{pmatrix}\\
&= F_1 \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\2&1&-1&0\\3&1&-2&0\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{G_1}\\
&= F_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=:F_2} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\3&1&-2&0\end{pmatrix} G_1 \qquad (\tilde{F}_2 := F_1F_2)\\
&= \tilde{F}_2 \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}}_{=:F_3} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix} G_1 \qquad (\tilde{F}_3 := \tilde{F}_2F_3)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{F}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:G_2} G_1 \qquad (\tilde{G}_2 := G_2 G_1) \\
&= \tilde{F}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{G}_2 \qquad (\tilde{F}_4 := \tilde{F}_3 F_4) \\
&= \tilde{F}_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:G_3} \tilde{G}_2 \qquad (\tilde{G}_3 := G_3 \tilde{G}_2)
\end{aligned}
$$

Da es sich bei den Matrizen F_1, F_2, F_3, F_4 sowie G_1, G_2, G_3 allesamt um Elementarmatrizen handelt und da die invertierbaren Matrizen (für jede Dimension) eine Gruppe bilden, sind $\tilde{F}_4$ und $\tilde{G}_3$ invertierbar und für $F := \tilde{F}_4^{-1}$, $G := \tilde{G}_3^{-1}$ gilt

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = FAG
$$

Der Vorteil oben durchgeführter Umformungen ist, dass man aus FAG sofort eine Basis des Bildes sowie des Kernes ablesen kann. Im Folgenden ist $e_i \in \mathcal{E}_k$ der i-te Vektor der Standardbasis von $\mathbb{K}^k$ ($k = 3, 4$). Wir sehen, dass $e_3, e_4 \in \operatorname{Ker}(L_{FAG})$ – insbesondere gilt $\operatorname{nullity}(L_{FAG}) \geq 2$ – und wegen

$$
\operatorname{Im}(L_{FAG}) = \operatorname{span}\{(FAG)^{(j)} \mid 1 \leq j \leq 4\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2\},
$$

dass $\operatorname{Rang}(L_{FAG}) = 2$. Aus der Dimensionsformel folgt

$$
\operatorname{nullity}(L_{FAG}) = \dim \mathbb{K}^4 - \operatorname{Rang}(L_{FAG}) = 4 - 2 = 2
$$

und somit ist $\{e_3, e_4\}$ eine Basis von $\operatorname{Ker}(L_{FAG})$. Da invertierbare Abbildungen linear unabhängige Mengen auf linear unabhängige Mengen abbilden, sind nach Teilaufgabe (a) die Mengen $L_G(\{e_3, e_4\}) = \{L_G(e_3), L_G(e_4)\}$ beziehungsweise $L_{F^{-1}}(\{e_1, e_2\}) = \{L_{F^{-1}}(e_1), L_{F^{-1}}(e_2)\}$ Basen von $\operatorname{Ker}(L_A)$ beziehungsweise von $\operatorname{Im}(L_A)$.

Wir berechnen

$$
F^{-1} = \tilde{F}_4 = F_1 F_2 F_3 F_4
$$

Bitte wenden!

$$= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}$$

$$G = \tilde{G}_3^{-1} = (G_3G_2G_1)^{-1} = G_1^{-1}G_2^{-1}G_3^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Im}(L_A)$ und

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Ker}(L_A)$.

c) 1. Wir berechnen

$$A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Somit ist A ein Produkt von Matrizen vollen Ranges (nämlich ein Produkt von Elementarmatrizen) und somit die Darstellungsmatrix einer Verknüpfung bijektiver Abbildungen und als solche insbesondere die Darstellungsmatrix einer surjektiven Abbildung. Folglich hat A vollen Rang, d.h. $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

2. In $\mathbb{F}_2$ gilt $1 + 1 = 0$, also ist

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist A von der Form $A = F \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix} G$, wobei F, G Produkte von Elementarmatrizen sind. Da Elementarmatrizen den Rang erhalten, folgt

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix} = 2$$

4. Wir bezeichen im Folgenden mit “$\longrightarrow$” die Überführung einer Matrix in eine andere Matrix mittels elementarer Zeilen- bzw. Spaltenumformung, wobei wir $\longrightarrow$ indizieren

- mit λZ_i (bzw. λS_j) im Falle der elementaren Umformung Multiplikation der i-ten Zeile (bzw. der j-ten Spalte) mit $\lambda \in \mathbb{R}$,
- mit $Z_i \leftrightarrow Z_{i'}$ (bzw. $S_j \leftrightarrow S_{j'}$) im Falle der elementaren Umformung Vertauschung der i-ten und der i'-ten Zeile (bzw. der j-ten und der j'-ten Spalte)
- und mit $Z_i + \lambda Z_{i'}$ (bzw. $S_j + \lambda S_{j'}$) im Falle der elementaren Umformung Addition des λ-fachen der i'-ten Zeile zur i-ten Zeile (bzw. des λ-fachen der j'-ten Spalte zur j-ten Spalte).

Bitte wenden!

Man berechnet mit elementaren Zeilenumformungen

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und ebenso

$$A_2^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Als Beispiel invertieren wir A_3

$$(A_3 \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-2Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4-3Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4+Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-5Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -4 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\xrightarrow{Z_2+6Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-2Z_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+3Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2\leftrightarrow Z_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3\leftrightarrow Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -16 & 7 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11}Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-2Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -7 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-7Z_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 35/11 & -16/11 & 13/11 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$

Folglich ist

$$A_3^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 35 & -16 & 13 & -22 \\ 11 & 0 & 11 & -11 \\ 10 & -3 & 10 & -11 \\ -16 & 7 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

5. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}}_{=:R}$$

R hat die gewünschte Form und für

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

gilt $BA = R$. Man kann B berechnen, indem man das Produkt der Inversen der oben auftauchenden Elementarmatrizen (in der richtigen Reihenfolge) bestimmt, oder mittels Gauss-Elimination. In der Notation zur Lösung von Aufgabe 3 liefert dies:

$$(B^{-1} \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+3Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & -1/4 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{array}\right)$$

Bitte wenden!

und folglich ist

$$B = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 & 3/8 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$