

Serie 10: Elementare Zeilenumformungen & Elementarmatrizen, Rang & Inverse einer Matrix

1. Seien U, V, W Vektorräume über \mathbb{K} . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Seien $T_1, T_2 \in \text{Hom}(V, W)$, dann ist

$$\text{Rang}(T_1 + T_2) \leq \text{Rang}(T_1) + \text{Rang}(T_2)$$

b) Seien $T \in \text{Hom}(U, V)$ und $S \in \text{Hom}(V, W)$, dann ist

$$\text{Rang}(S \circ T) \leq \min\{\text{Rang}(T), \text{Rang}(S)\}$$

2. Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: Sei $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $r = \text{Rang}(A)$. Dann ist $r \leq \min\{m, n\}$ und mittels endlich vieler Zeilen- und Spaltenumformungen kann A in die Form $D \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ gebracht werden, wobei

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ \& } i \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3. a) Sei $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ beliebig. Seien $F \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ sowie $G \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertierbar. Zeigen Sie, dass

$$\text{Ker}(L_A) = L_G(\text{Ker}(L_{FAG})) \quad \text{und} \quad \text{Im}(L_A) = L_{F^{-1}}(\text{Im}(L_{FAG}))$$

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$$

Bestimmen Sie Basen von $\text{Ker}(L_A)$ und $\text{Im}(L_A)$ für $L_A : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$.

Bitte wenden!

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Rang von A

1. über \mathbb{R} .
2. über \mathbb{F}_2 .

4. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen über \mathbb{R} .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$$

Wenden Sie elementare Zeilenumformungen in \mathbb{Q} auf A an, so dass die resultierende Matrix $R \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$ auf der linken Seite die 3×3 -Einheitsmatrix I_3 enthält. Finden Sie eine invertierbare Matrix $B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$, so dass $BA = R$ und bestimmen Sie B^{-1} .

Siehe nächstes Blatt!

6. Online Abgabe Serie 10:

1. Welche der folgenden Matrizen sind Inverse von $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ über \mathbb{Q} ?

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Der Rang der linearen Abbildung L_A für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Bitte wenden!

3. Bestimmen Sie den Rang der Matrix A , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$$

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

4. Für alle $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ gilt $\text{Rang}(AB) = \text{Rang}(BA)$.

- (a) richtig
- (b) falsch

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Was ist der Rang der Matrix A ?

- (a) 4 für beliebige Werte von k .
- (b) 3 für beliebige Werte von k .
- (c) 2, falls $k = \pm 1$, und 4 sonst.
- (d) 3, falls $k = \pm 1$, und 4 sonst.
- (e) 3, falls $k = 1$, und 4 sonst.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 2. Dezember 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.