Lösung Serie 12:
Determinanten (Teil 1)

1. a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix zum gegebenen Gleichungssystem $Ax = b$ ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & u \\ a & 1 & a^2 & v \\ a^2 & a & 1 & w \end{array}\right)$$

Für $u = v = w = 2$ bemerken wir zuerst entweder durch Inspektion (sprich genaues hinsehen) oder durch explizite Rangberechnung die folgenden zwei Spezialfälle:

"$a = 1$": In diesem Falle ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

und also $1 = \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A \mid b)$. Man überprüft, dass $(1, 0, 1)^T$ eine Lösung des Systems $Ax = b$ ist und dass $(1, -1, 0)^T$ und $(1, 0, -1)^T$ linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$ sind. Da $\operatorname{nullity}(L_A) = 3 - \operatorname{Rang}(A) = 2$, folgt also

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

"$a = -1$": In diesem Falle ist

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 - Z_1]{Z_2 + Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bitte wenden!

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Folglich ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A \mid b) = 2$. Man überprüft, dass $(0,0,2)^T$ eine Lösung des Systems $Ax = b$ und dass $(1,1,0)^T$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$ ist. Wegen $\mathrm{nullity}(L_A) = 3 - \mathrm{Rang}(A)$ ist also

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Falls $a \notin \{\pm 1\}$, dann hat die Koeffizientenmatrix A vollen Rang und ist somit invertierbar, d.h. $Ax = b$ hat genau eine Lösung. Hierfür berechnen wir A^{-1} mittels Zeilenumformungen. Man beachte, dass das Polynom $a^2 + a + 1$ keine reellen Nullstellen besitzt, und deswegen $\alpha := \frac{1+a}{1+a+a^2} \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist (in Abhängigkeit von a).

$$\begin{aligned}
(A \mid I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a^2 & 0 & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[Z_3 - a^2 Z_1]{Z_2 - a Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a^2(1-a) & -a & 1 & 0 \\ 0 & a(1-a^2) & 1-a^4 & -a^2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\frac{1}{1-a^2} Z_3]{\frac{1}{1-a^2} Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a} & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & -\frac{a^2}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 - a Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a} & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+a+a^2}{1+a} & 0 & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\alpha Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a} & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha a}{1-a^2} & \frac{\alpha}{1-a^2} \end{array}\right) \qquad (\star) \\
&\xrightarrow[Z_1 - a^2 Z_3]{Z_2 - \frac{a^2}{1+a} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & \frac{\alpha a^3}{1-a^2} & -\frac{\alpha a^2}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1+a+\alpha a^3}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha a}{1-a^2} & \frac{\alpha}{1-a^2} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_1 - a Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1+a}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{a+a^2-\alpha a^3}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a+a^2}{(1-a^2)(1+a)} & \frac{1+a+\alpha a^3}{(1-a^2)(1+a)} & -\frac{\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha a+\alpha a^2}{(1-a^2)(1+a)} & \frac{\alpha+\alpha a}{(1-a^2)(1+a)} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

und folglich ist in diesem Fall die Lösungsmenge gegeben durch $\mathscr{L} = \{A^{-1}b\}$,

Siehe nächstes Blatt!

wobei

$$
\begin{aligned}
A^{-1}b =& \frac{1}{(1-a^2)(1+a)} \begin{pmatrix} 1+a & \alpha a^3 - a - a^2 & -\alpha a^2 \\ -a-a^2 & 1+a+\alpha a^3 & -\alpha a^2 \\ 0 & -\alpha a - \alpha a^2 & \alpha + \alpha a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
=& \frac{2}{(1-a^2)(1+a)} \begin{pmatrix} \frac{(1-a^2)(1+a)}{1+a+a^2} \\ \frac{(1-a^2)(1+a)}{1+a+a^2} \\ \frac{(1-a^2)(1+a)}{1+a+a^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{1+a+a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Rechnung wurde bis am Schluss durchgeführt, weil sich so im allgemeinen Fall die Lösung bestimmen lässt. In diesem Fall wäre es besser, wenn man in $(\star)$ erkennt, dass A vollen Rang besitzt und somit invertierbar ist, um dann das Gleichungssystem nochmls anzuschauen und zu erkennen, dass $\frac{2}{1+a+a^2}(1,1,1)^T$ eine Lösung und somit die eindeutige Lösung ist.

b) Wenn man den Spezialfall $a = -1$ in Teilaufgabe (a) betrachtet, sieht man, dass für $u = v = -w = 2$ die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ Rang 3 besitzt, also ist $2 = \operatorname{Rang}(A) \neq \operatorname{Rang}(A \mid b) = 3$ und somit hat das Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung.

2. Keine Musterlösung.

3. **a)** Wir wissen aus Serie 6, Aufgabe 1, dass $\left\{ \binom{A_{11}}{A_{12}}, \binom{A_{21}}{A_{22}} \right\}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{K}^2$ ist, wenn $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$, und da $\dim \mathbb{K}^2 = 2$, sind zwei Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn Sie eine Basis bilden. Also sind die Zeilen $A_{(1)} = (A_{11}, A_{12})$ und $A_{(2)} = (A_{21}, A_{22})$ genau dann linear unabhängig, wenn für $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix}\right)$ gilt $\det(A) \neq 0$.

$A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten linear unabhängig sind, bzw. wenn $\dim \operatorname{Spaltenraum}(A) = 2$. Wegen

$$\dim \operatorname{Spaltenraum}(A) = \dim \operatorname{Zeilenraum}(A)$$

ist A also genau dann invertierbar, wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind, also wenn $\det(A) \neq 0$.

In Aufgabe (5) beweisen wir die Formel

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^\natural = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

b) Wir berechnen beispielsweise

1. $\det(A) = -5 + 12 = 7$

Bitte wenden!

2. $\det(C) = -5 + 12 = 7$
3. $\det(E) = -5 + 12 = 7 \equiv 0 \mod 7$ und $\det(F) = 36 - 0 \equiv 1 \mod 7$

wobei wir für die letzten beiden Matrizen verwendet haben, dass für alle $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(a \mod n)(d \mod n) - (b \mod n)(c \mod n) = ad - bc \mod n$$

was in Serie 3 gezeigt wurde. Man findet, dass alle Beispiele ausser E invertierbar sind.

4. 1. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
A^\natural A &= \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{22}A_{11} - A_{12}A_{21} & A_{22}A_{12} - A_{12}A_{22} \\ -A_{21}A_{11} + A_{11}A_{21} & -A_{21}A_{12} + A_{11}A_{22} \end{pmatrix} \\
&= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})I_2 = \det(A)I_2 \\
AA^\natural &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} & -A_{11}A_{12} + A_{12}A_{11} \\ A_{21}A_{22} - A_{22}A_{21} & -A_{21}A_{12} + A_{22}A_{11} \end{pmatrix} \\
&= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})I_2 = \det(A)I_2
\end{aligned}$$

2. Wir berechnen

$$\det(A^\natural) = A_{22}A_{11} - (-A_{21})(-A_{12}) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = \det(A)$$

3. Sei $A^T = \left(\begin{smallmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{smallmatrix}\right)$, dann ist

$$(A^T)^\natural = \begin{pmatrix} A'_{22} & -A'_{12} \\ -A'_{21} & A'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} = (A^\natural)^T$$

wie gewünscht.

4. **"⇒":** Sei $\det(A) = 0$. Falls $A = 0$, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $A \neq 0$ und insbesondere $A^\natural \neq 0$. Wegen $\det(A) = 0$ ist $AA^\natural = 0$ und folglich $\operatorname{Ker}(L_A) \neq \{0\}$, also ist A nicht invertierbar.

"⇐": Falls $\det(A) \neq 0$, dann ist

$$(\det(A)^{-1}A^\natural)A = I_2$$

und folglich ist A invertierbar.

Siehe nächstes Blatt!

5. Wir verwenden die Formel aus Teilaufgabe 4.1 und finden beispielsweise:

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix},$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 6 \mod 7 & 0 \mod 7 \\ -3 \mod 7 & 6 \mod 7 \end{pmatrix}$$

5.

1. Da die Nullmatrix eine Zeile von der Form $0 \cdot A_{(i)}$ enthält, wäre unter der Annahme der Multilinearität $\lambda = \delta(0) = 0\delta(0) = 0$. Das ist absurd.
2. Wir multiplizieren die Zeile $A_{(1)}$ von A mit 0 und erhalten A' mit der gleichen zweiten Zeile wie A. Wäre δ multilinear, dann wäre
$$A_{22} = \delta(A') = 0\delta(A) = 0$$
Das ist aber im Allgemeinen falsch, beispielsweise für $A = I_3$.
3. Die Abbildung ist multilinear, wie in den handschriftlichen Notizen am Ende dieser Datei gezeigt.
4. Die Abbildung ist im Allgemeinen nicht multilinear. Sei beispielsweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Angenommen die Abbildung wäre multilinear, dann nehmen wir eine Matrix A mit $A_{11} = A_{31} = A_{33} = 1$ und multiplizieren die dritte Zeile mit 2 und erhalten so die Matrix A'. Für diese gilt
$$2 = 2\delta(A) = \delta(A') = A_{11}(2A_{31})(2A_{33}) = 4A_{11}A_{31}A_{33} = 4\delta(A) = 4$$
Das ist absurd.
5. Die Abbildung ist im Allgemeinen nicht multilinear. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A = I_3$. Wir multiplizieren die erste Zeile von A mit 2 um A' zu erhalten. Wäre δ multilinear, dann wäre
$$2 = 2\delta(A) = \delta(A') = (2A_{11})^2 A_{22}^2 A_{33}^2 = 4$$
Das ist absurd.

6. Wir zeigen, dass die multilinearen Abbildungen einen Unterraum des Vektorraums aller Abbildungen von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nach $\mathbb{K}$ bilden. Die 0-Abbildung ist sicherlich multilinear. Es bleibt also zu zeigen, dass für multilineare Abbildungen δ_1, δ_2 und $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\lambda\delta_1 + \delta_2$ multilinear ist. Wir berechnen

$$(\lambda\delta_1 + \delta_2)\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \lambda\delta_1\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta_2\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$=c\lambda\delta_1\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(i)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}+\lambda\delta_1\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A'_{(i)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}+c\delta_2\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(i)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}+\delta_2\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A'_{(i)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}$$

$$=c(\lambda\delta_1+\delta_2)\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(i)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}+(\lambda\delta_1+\delta_2)\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A'_{(i)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}$$

und folglich ist $\lambda\delta_1+\delta_2$ ebenfalls multilinear, wie gewünscht.

Wir zeigen nun, dass auch die alternierenden multilinearen Abbildungen einen Unterraum bilden. Die Nullabbildung ist sicherlich alternierend. Es bleibt also nur, zu zeigen, dass für alternierende multilineare δ_1, δ_2 und für $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\lambda\delta_1+\delta_2$ alternierend ist (die Multilinearität wurde gerade erst bewiesen). Wir berechnen unter der Annahme $A_{(i)} = A_{(i+1)}$

$$(\lambda\delta_1+\delta_2)\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}=\lambda\delta_1\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}+\delta_2\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\,\underbrace{\delta_1\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(i)}\\ A_{(i+1)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}}_{=0}+\underbrace{\delta_2\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(i)}\\ A_{(i+1)}\\ \vdots\\ A_{(n)}\end{pmatrix}}_{=0}=0$$

und somit ist $\lambda\delta_1+\delta_2$ alternierend.

7. Die Idee ist wie folgt: man bemerkt zuerst, dass eine Wahl zweier verschiedener Spalten der Wahl einer Kopie von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ in $M_{2\times n}(\mathbb{K})$ entspricht. Die Restriktion einer multilinearen Abbildung auf diese Kopie von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ definiert eine alternierende multilineare Abbildung $M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ und wegen der Eindeutigkeit der Determinanten ist diese Restriktion von der Form $\lambda \det$, für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Andererseits ist die 2×2-Determinante definiert auf zwei Spalten – also gegeben durch ignorieren aller ausser zwei Spalten – eine alternierende Bilinearform auf $M_{2\times n}(\mathbb{K})$. Es gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Spalten zu wählen und wir behaupten folglich, dass

Siehe nächstes Blatt!

die 2×2-Determinanten auf $M_{2\times n}(\mathbb{K})$ gegeben durch ignorieren aller ausser zweier Spalten eine Basis von $\mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$ bilden.

Gegeben die Beobachtung von oben, definiere

$$\delta_{j_1,j_2} : M_{2\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \quad (1 \le j_1 < j_2 \le n)$$

für $A \in M_{2\times n}(\mathbb{K})$ durch $\delta_{j_1,j_2}(A) : A_{1j_1}A_{2j_2} - A_{2j_1}A_{1j_2}$. Dann ist $\delta_{j_1,j_2} \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$. (Beachten Sie: Im Folgenden ist δ_{kl} das Kronecker-Delta und $\delta_{k,l}$ ein Element in $\mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$; ein weiterer Beleg für die enorme Wichtigkeit korrekter Interpunktion.) Wir zeigen, dass diese Abbildungen linear unabhängig sind. Seien $\{\lambda_{j_1,j_2} \mid 1 \le j_1 < j_2 \le n\}$, so dass

$$0 = \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \lambda_{j_1,j_2}\delta_{j_1,j_2}$$

Betrachte die Matrix $A \in M_{2\times n}(\mathbb{K})$ mit $A_{ij} = \delta_{i1}\delta_{jk} + \delta_{i2}\delta_{jl}$ für $1 \le k < l \le n$, d.h. A enthält verteilt auf die beiden Spalten k und l eine Kopie von I_2 und ist sonst überall 0. Dann ist

$$\begin{aligned}\delta_{j_1,j_2}(A) =& A_{1j_1}A_{2j_2} - A_{2j_1}A_{1j_2} \\ =&(\delta_{11}\delta_{j_1k} + \delta_{12}\delta_{j_1l})(\delta_{21}\delta_{j_2k} + \delta_{22}\delta_{j_2l}) \\ &\quad - (\delta_{21}\delta_{j_1k} + \delta_{22}\delta_{j_1l})(\delta_{11}\delta_{j_2k} + \delta_{12}\delta_{j_2l}) \\ =&\delta_{j_1k}\delta_{j_2l} - \delta_{j_1l}\delta_{j_2k} = \delta_{j_1k}\delta_{j_2l}\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung die Annahmen $j_1 < j_2$ und $k < l$ kombiniert haben. Somit ist $\delta_{j_1,j_2}(A) = 1$ falls $j_1 = k$ und $j_2 = l$ und 0 sonst. Also ist $\lambda_{k,l} = 0$. Es folgt die lineare Unabhängigkeit.

Es bleibt zu zeigen, dass sich jede Abbildung $\delta \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K})$ als Summe der Elemente δ_{j_1,j_2}, $1 \le j_1 < j_2 \le n$ schreiben lässt. Sei hierfür $\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ die geordnete Standardbasis. Dann ist

$$\begin{aligned}\delta(A) =& \delta\begin{pmatrix}A_{(1)}\\A_{(2)}\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}\sum_{j_1=1}^n A_{1j_1}e_{j_1}\\ \sum_{j_2=1}^n A_{2j_2}e_{j_2}\end{pmatrix} \\ =& \sum_{j_1=1}^n\sum_{j_2=1}^n A_{1j_1}A_{2j_2}\underbrace{\delta\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_2}\end{pmatrix}}_{=:\lambda_{j_1,j_2}(\delta)} \\ =& \sum_{1\le j_1<j_2\le n}\lambda_{j_1,j_2}(\delta)A_{1j_1}A_{2j_2} + \sum_{1\le j_2<j_1\le n}\lambda_{j_1,j_2}(\delta)A_{1j_1}A_{2j_2} \quad (\text{da } \lambda^\delta_{j,j} = 0) \\ =& \sum_{1\le j_1<j_2\le n}\lambda_{j_1,j_2}(\delta)A_{1j_1}A_{2j_2} + \sum_{1\le j_1<j_2\le n}\underbrace{\lambda_{j_2,j_1}(\delta)}_{=-\lambda^\delta_{j_1,j_2}}A_{1j_2}A_{2j_1} \\ =& \sum_{1\le j_1<j_2\le n}\lambda_{j_1,j_2}(\delta)(A_{1j_1}A_{2j_2} - A_{1j_2}A_{2j_1})\end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta)\delta_{j_1,j_2}(A)$$

Da die Koeffizienten $\lambda_{j_1,j_2}(\delta)$ durch δ vollständig bestimmt sind, d.h. von A unabhängig waren, folgt also

$$\delta = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} \lambda_{j_1,j_2}(\delta)\delta_{j_1,j_2}$$

wie gewünscht.

Da bekanntlich $\binom{n}{2}$ genau die Anzahl Möglichkeiten ist, zwei verschiedene Spalten einer Matrix $A \in M_{2\times n}(\mathbb{K})$ auszuwählen, folgt $\dim \mathrm{Alt}_2(\mathbb{K}) = \binom{n}{2}$.

Siehe nächstes Blatt!

Handschriftliche Argumente zur Aufgabe 5

3)

$$\delta\begin{pmatrix} cA_1 + A_1' \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = (cA_{11} + A_{11}')A_{23}A_{32} = c\,A_{11}A_{23}A_{32} + A_{11}'A_{23}A_{32} = c\,\delta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} A_1 \\ cA_2 + A_2' \\ A_3 \end{pmatrix} = A_{11}(cA_{23} + A_{23}')A_{32} = c\,A_{11}A_{23}A_{32} + A_{11}A_{23}'A_{32} = c\,\delta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2' \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ cA_3 + A_3' \end{pmatrix} = A_{11}A_{23}(cA_{32} + A_{32}') = c\,A_{11}A_{23}A_{32} + A_{11}A_{23}A_{32}' = c\,\delta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3' \end{pmatrix}$$