

Serie 12: Determinanten (Teil 1)

1. a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= u \\ax_1 + x_2 + a^2x_3 &= v \\a^2x_1 + ax_2 + x_3 &= w\end{aligned}$$

mit $u = v = w = 2$ genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

- b) Geben Sie u, v, w an, so dass das Gleichungssystem für $a = -1$ keine Lösung hat.

2. Beweisen Sie Thm. 1, §4.1: Zeigen Sie, dass die Determinante $\det : M_{2 \times 2}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ eine normierte alternierende Multilinearform ist, d.h.

1. $\forall A_{(1)}, A'_{(1)}, A_{(2)}, A'_{(2)} \in \mathbb{K}^2, \forall c \in \mathbb{K} :$

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} &= c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)} + A'_{(2)} \end{pmatrix} &= c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d.h. \det ist linear in den Zeilen von $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$.

2. \det ist normiert, d.h. $\det(I_2) = 1$.

3. \det ist alternierend, d.h.

$$\forall A \in \mathbb{K}^2 : \det \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Bemerkung: Motivieren Sie die Bezeichnung, indem Sie daraus schliessen, dass gilt

$$\forall A_{(1)}, A_{(2)} \in \mathbb{K}^2 : \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} A_{(2)} \\ A_{(1)} \end{pmatrix}$$

3. a) Zeigen Sie, dass die Zeilen einer Matrix A genau dann linear unabhängig sind, wenn $\det(A) \neq 0$. Folgern Sie daraus, dass $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$.
- b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen und bestimmen Sie, welche Matrizen invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 5 - 2i & 6 + 4i \\ -3 + i & 7i \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$E = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \pmod{7} \text{ und } F = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \pmod{7} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{F}_7)$$

4. Sei $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Die *adjunkte* von A ist die Matrix A^\natural ist die Matrix

$$A^\natural := \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Adjunkten:

1. $A^\natural A = A A^\natural = \det(A) I_2$
2. $\det(A^\natural) = \det(A)$
3. $(A^T)^\natural = (A^\natural)^T$
4. Folgern Sie aus dem oben gezeigten, dass $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ und bestimmen Sie für invertierbare A die Inverse A^{-1} abhängig von A^\natural .
5. Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen aus Teilaufgabe (3b).

5. Welche der folgenden Abbildungen $\delta : M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ sind 3-linear?

Siehe nächstes Blatt!

1. $\exists \lambda \in \mathbb{K} \forall A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = \lambda$
2. $\forall A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{22}$
3. $\forall A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{11}A_{23}A_{32}$
4. $\forall A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{11}A_{31}A_{32}$
5. $\forall A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K}) : \delta(A) = A_{11}^2 A_{22}^2 A_{33}^2$

6. Zeigen Sie, dass die Menge der multilinearen Abbildungen $M_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ mit punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation ein Vektorraum ist. Zeigen Sie zudem, dass die Menge der alternierenden multilinearen Abbildungen ein Unterraum ist.

***7.** Sei $\text{Alt}_2(\mathbb{K}^n)$ der Vektorraum der alternierenden, 2-linearen (üblicherweise *bilinearen*) Abbildungen von $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ nach \mathbb{K} mit $n \geq 2$. D.h. $\delta \in \text{Alt}_2(\mathbb{K}^n)$ ist eine Abbildung $\delta : M_{2 \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, so dass

1. wann immer $c \in \mathbb{K}$ und $A_{(1)}, A'_{(1)}, A_{(2)}, A'_{(2)}$ Zeilen aus \mathbb{K}^n sind, dann gelten

$$\delta \begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = c\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)} + A'_{(2)} \end{pmatrix} = c\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \end{pmatrix}$$

2. wann immer $A \in \mathbb{K}^n$ eine Zeile ist, dann folgt

$$\delta \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Folgern Sie aus der Eindeutigkeit der 2×2 -Determinante, dass $\dim \text{Alt}_2(\mathbb{K}^n) = \binom{n}{2}$.

Bitte wenden!

8. Online Abgabe Serie 12:

1. Sei $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 8$.

(b) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c - a & d - b \end{pmatrix} = 4$.

(c) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c + 2a & d + 2b \end{pmatrix} = 4$.

(d) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 12$.

2. Sind die beiden Spalten einer 2×2 -Matrix A identisch, so gilt $\det(A) = 0$

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei A eine reelle 2×2 -Matrix, $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

(a) $\dim \text{Ker} L_A = 2 - \det(A)$

(b) $\dim \text{Ker} L_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 0$

(c) $\dim \text{Ker} L_A = 1 \Rightarrow \det(A) = 1$

(d) $\dim \text{Ker} L_A = 2 - \text{Rang} L_A$

(e) $\dim \text{Ker} L_A = 2 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Sei \mathbb{K} ein Körper. Die Abbildung $\det : M_{2 \times 2}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ist linear.

- (a) Richtig
- (b) Falsch

5. Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$ Vektoren mit Anfangspunkt im Ursprung, dann ist die Fläche des Parallelograms mit benachbarten Seiten u und v gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

- (a) Richtig
- (b) Falsch

6. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ und seien zwei Zeilen von A identisch, dann ist $\det(A) = 0$.

- (a) Richtig.
- (b) Falsch.

7. Sei $B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ erhalten aus $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ mittels Vertauschung zweier Zeilen. Dann gilt $\det(B) = -\det(A)$.

- (a) Richtig
- (b) Falsch

8. Die Abbildung $\delta : M_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \delta(A) := 0$ ist eine Determinante.

- (a) Richtig
- (b) Falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 16. Dezember 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.