Lösung Serie 13: Determinanten (Teil 2)

1. Falls $\delta(I_n) \in \mathbb{K}^\times$, dann ist $\delta(I_n)^{-1}\delta$ eine Determinante und somit $\delta = \delta(I_n)\det$.

Sei also $\delta(I_n) = 0$. Wir befolgen den Hinweis: Sei P eine Permutationsmatrix, d.h. es gibt $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden,[1] so dass

$$P = \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix}$$

wobei $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ist. Seien $1 \leq k < l \leq n$ und sei P' die Permutationsmatrix, die aus P durch Vertauschung der k-ten und der l-ten Zeile entsteht. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 =& \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_k}^T + e_{j_l}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_k}^T + e_{j_l}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_k}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_{k-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{k+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_{l-1}}^T \\ e_{j_l}^T \\ e_{j_{l+1}}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} \\ =& 0 + \delta(P) + \delta(P') + 0 \end{aligned}$$

[1] D.h. $j : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, $i \mapsto j_i$ ist eine Bijektion – eine sog. Permutation, da sie die Elemente von $\{1, \dots, n\}$ umordnet/permutiert

Insbesondere ist also $\delta(P') = -\delta(P)$. Wir zeigen nun, dass jede Permutationsmatrix durch eine Folge von Vertauschungen zweier Zeilen aus I_n entsteht, und per Induktion gilt dann $\delta(P) = \pm\delta(I_n)$.

Sei also eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ wie oben gegeben, und sei P die entsprechende Permutationsmatrix. Wir wenden Vertauschungen zweier Zeilen an, welche nacheinander angewandt die Permutationsmatrix $P^T = (e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ in I_n überführen. Falls $P_{(i)} = e_i^T$ für alle $1 \le i \le n$, dann ist $P = I_n$ und wir sind fertig. Andernfalls existiert ein $1 \le i \le n$, so dass $P_{(i)} \neq e_i^T$. Sei $1 \le i^* \le n$ mit $P_{(i)} = i^*$. Da P eine Permutationsmatrix ist, existiert per definitionem ein Zeilenindex $1 \le i' \le n$, so dass $P_{(i')} = e_i^T$ und nach Annahme ist $i' \neq i$. Nach Vertauschung der Zeilen i und i' von P entsteht $\tilde{P}$ mit $\tilde{P}_{(i)} = e_i^T$, $\tilde{P}_{(i')} = e_{i^*}^T$ und $\tilde{P}_{(k)}$ sonst. Die relevante Erkenntnis hier ist, dass $P_{(i')} \neq e_{i'}^T$, d.h. nach Vertauschung ist die Zeile i' von $\tilde{P}$ im schlimmsten Fall immer noch falsch, die Anzahl der "falschen" Zeilen in $\tilde{P}$ ist also strikt kleiner als in P, bzw. formaler

$$\{i \mid P_{(i)} \neq e_i^T\} > \{i \mid \tilde{P}_{(i)} \neq e_i^T\}$$

Man wendet nun Schritt für Schritt Vertauschungen von falschen Zeilen wie oben an, wobei sich in jedem Schritt die Anzahl falscher Zeilen um mindestens eins verringert. Da P höchstens n falsche Zeilen besitzt, hat man nach $k \le n$ Vertauschungen P in I_n überführt. Insbesondere ist $\delta(P) = (-1)^k \delta(I_n) = 0$ nach Voraussetzung.

Da δ alternierend und weil wegen obigem Argument $\delta(P) = 0$ für alle Permutationsmatrizen ist, folgt aus $\delta(I_n) = 0$ also

$$\delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix} = 0$$

für alle $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\}$.

Daraus folgt für allgemeine Matrizen $A \in M_{n \times n}$:

$$\delta(A) = \delta \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^n A_{1j_1} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^n A_{1j_n} e_{j_n}^T \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n A_{1j_1} \cdots A_{nj_n} \underbrace{\delta \begin{pmatrix} e_{j_1}^T \\ \vdots \\ e_{j_n}^T \end{pmatrix}}_{=0} = 0$$

und folglich ist $\delta = 0 = 0 \det$ wie gewünscht.

2. a) Wir berechnen

$$(A^\natural A)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^\natural A_{kj}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{kj} \det(\tilde{A}_{ki})$$

Insbesondere ist also $(A^\natural A)_{jj} = \varepsilon_j(A)$ und wegen der Eindeutigkeit der Determinanten also $(A^\natural A)_{jj} = \det(A)$. Sei also $i \neq j$. Dann ist die Abbildung

$$\eta_{i,j,k}(A) := A_{kj} \det(\tilde{A}_{ki})$$

multilinear in den Zeilen von A und alternierend. Also ist nach Aufgabe (1) $\eta_{i,j,k}(A) = c \det(A)$ für ein $c \in \mathbb{K}$ abhängig von i, j, k, aber unabhängig von A. Insbesondere ist $\eta_{i,j,k}(I_n) = c$. Angenommen $\eta_{i,j,k}(I_n) \neq 0$, dann ist $(I_n)_{kj} \neq 0$, und also $k = j$, und auch $\det(\widetilde{(I_n)_{ki}}) \neq 0$, und also $i = k$. Da nach Annahme $i \neq j$, folgt $\eta_{i,j,k}(I_n) = 0$ und also $c = 0$. Es folgt $(A^\natural A)_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und folglich die Behauptung.

b) Wenn $\det(A) \neq 0$, dann ist $I_n = \frac{1}{\det(A)} A^\natural$, und somit folgt aus $\det(A) \neq 0$, dass A invertierbar ist mit $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^\natural$.

c) Man beachte, dass $\widetilde{A^T}_{ji} = (\tilde{A}_{ij})^T$ und folglich ist

$$(-1)^{i+j} \det(\widetilde{A^T}_{ji}) = (-1)^{j+i} \det\left((\tilde{A}_{ij})^T\right) = (-1)^{j+i} \det(\tilde{A}_{ij})$$

Insbesondere ist also

$$\left((A^T)^\natural\right)_{ij} = (-1)^{j+i} \det(\tilde{A}_{ij}) = \left((A^\natural)^T\right)_{ij}$$

d) Falls A^T invertierbar ist, dann ist $\det(A) \neq 0$ und

$$I_n = \frac{1}{\det(A)} (A^T)^\natural A^T = \frac{1}{\det(A)} (A^\natural)^T A^T$$

und wegen Linearität der Transposition und wegen Eindeutigkeit der Inversen ist also $(A^T)^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} A^\natural\right)^T = (A^{-1})^T$.

e) Wenn man obige Erkenntnis verwenden will, dann berechnet man die Determinante sowie die Kofaktoren von A. Hier lässt sich die Berechnung der Determinante mittels elementarer Zeilenumformungen bedeutend erleichtern

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{Z_5+Z_1 \\ Z_5+Z_2 \\ Z_5-Z_4}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -6 & 32 \end{vmatrix}$$

Bitte wenden!

$$\overset{Z_4+Z_1}{=}\begin{vmatrix}2&-3&5&1&4\\2&-3&1&6&18\\4&-3&9&6&10\\0&1&-1&0&3\\0&1&-11&-6&32\end{vmatrix}\overset{Z_5-Z_4}{=}\begin{vmatrix}2&-3&5&1&4\\2&-3&1&6&18\\4&-3&9&6&10\\0&1&-1&0&3\\0&0&-10&-6&29\end{vmatrix}$$

$$\underset{Z_3-2Z_1}{\overset{Z_2-Z_1}{=}}\begin{vmatrix}2&-3&5&1&4\\0&0&-4&5&14\\0&3&-1&4&2\\0&1&-1&0&3\\0&0&-10&-6&29\end{vmatrix}\overset{Z_3-3Z_4}{=}\begin{vmatrix}2&-3&5&1&4\\0&0&-4&5&14\\0&0&2&4&-7\\0&1&-1&0&3\\0&0&-10&-6&29\end{vmatrix}$$

$$=2*\begin{vmatrix}0&-4&5&14\\0&2&4&-7\\1&-1&0&3\\0&-10&-6&29\end{vmatrix}=2*\begin{vmatrix}-4&5&14\\2&4&-7\\-10&-6&29\end{vmatrix}$$

$$\underset{Z_3+5Z_2}{\overset{Z_1+2Z_2}{=}}2*\begin{vmatrix}0&13&0\\2&4&-7\\0&14&-6\end{vmatrix}=-4(-13*6)=312$$

Ähnlich berechnet man die Kofaktoren und findet

$$A^{-1}=\frac{1}{312}\begin{pmatrix}-5832&-4&1396&-4760&520\\402&-46&-14&406&26\\2142&-34&-458&1738&-182\\-264&24&48&-144&0\\684&4&-148&548&-52\end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wie in diesem Beispiel ersichtlich, ist Inversion unter Verwendung der Adjunkten (genannt die Cramer'sche Regel) meist nicht einfacher oder schneller als Inversion mittels Gausselimination – die Berechnung von Determinanten ist numerisch aufwendig und tatsächlich verwenden viele Implementationen die Gausselimination um die Determinante aus einer oberen Dreiecksmatrix ablesen zu können. Die Cramer'sche Regel ist allerdings von grosser Bedeutung für die Theorie der Lie Gruppen und algebraischer Gruppen.

3. Keine Musterlösung.

4. Wir addieren das 1000-fache der ersten, das 100-fache der zweiten sowie das 10-fache der dritten Spalte zur vierten Spalte und erhalten

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&0&1&4\\1&4&8&4\\3&7&1&0\\6&9&9&6\end{vmatrix}\underset{Z_4+10Z_3}{\overset{\substack{Z_4+1000Z_1\\Z_4+100Z_2}}{=}}\begin{vmatrix}2&0&1&2014\\1&4&8&1484\\3&7&1&3710\\6&9&9&6996\end{vmatrix}=106*\begin{vmatrix}2&0&1&n_1\\1&4&8&n_2\\3&7&1&n_3\\6&9&9&n_4\end{vmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

für $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}$.

5. a) Zuerst bemerken wir folgendes: Entwicklung nach der ersten Spalte zeigt, dass $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) = \det(D)$, wann immer $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ und per Induktion folgt nach Entwicklung nach der ersten Spalte, dass auch $\det\left(\begin{smallmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) = \det(D)$. Analog zeigt man, dass $\det\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{smallmatrix}\right) = \det(A)$ für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dies ist unabhängig von n, m.

Insbesondere folgt für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, dass

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$$

Wir lösen nun die Aufgabe.

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Aus Serie 11 wissen wir, dass invertierbare Matrizen $Q_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $Q_2 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ existieren, so dass Q_1A und Q_2D obere Dreiecksmatrizen sind. Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} Q_1A & Q_1B \\ 0 & Q_2D \end{pmatrix}$$

Da $\left(\begin{smallmatrix} Q_1A & Q_1B \\ 0 & Q_2D \end{smallmatrix}\right)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, und dasselbe gilt für die Matrizen Q_1A sowie Q_2D. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} Q_1A & Q_1B \\ 0 & Q_2D \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} \det(Q_1A)\det(Q_2D) \\ &= \det(A)\det(D)\end{aligned}$$

wegen der gezeigten Eigenschaft für Blockdiagonalmatrizen.

b) Man bemerkt

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist also nach Teilaufgabe (a)

$$\det(I_m + AB) = \det\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix} \\
&= \det(I_n + BA)
\end{aligned}
$$

Somit folgt die Aussage aus Teilaufgabe (a).

c) Keine Musterlösung.

6. **a)** Keine Musterlösung.

b) Keine Musterlösung.

c) Wir verwenden Teilaufgabe (b) sowie Entwicklung nach der ersten Spalte und erhalten

$$
\begin{aligned}
V(x_1,\dots,x_n) &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & p_1(x_1,x_2) & \cdots & p_{n-2}(x_1,x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & p_1(x_1,x_n) & \cdots & p_{n-2}(x_1,x_n) \end{vmatrix} \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \\
&\underset{2\le j\le n-1}{\overset{S_j - \sum_{k=0}^{j-1} x^k y^{j-k} S_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \\
&= V(x_2,\dots,x_n) \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
p_l(x,y) := \sum_{k=0}^{l} x^k y^{l-k} = y^l + \sum_{k=0}^{l-1} x^k y^{l-k}
$$

d) Die folgt per Induktion. Für den Fall $n = 1$ stimmt die Aussage gemäss Teilaufgabe (a). Angenommen die Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$ Variablen. Aus Teilaufabe (c) folgt also

$$
\begin{aligned}
V(x_1,\dots,x_{n+1}) &= V(x_2,\dots,x_{n+1}) \prod_{2\le j\le n+1} (x_j - x_1) \\
&= \prod_{2\le i<j\le n+1} (x_j - x_i) \prod_{2\le j\le n+1} (x_j - x_1) \\
&= \prod_{1\le i<j\le n+1} (x_j - x_i)
\end{aligned}
$$

und also folgt die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

e) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^d$. Wir wählen $r_0, \ldots, r_d \in \mathbb{Q}$ paarweise verschieden, dann ist nach Voraussetzung $p(r_i) \in \mathbb{Q}$ für alle $0 \leq i \leq d$. Insbesondere ist nach Teilaufgabe (d) $W(r_0, \ldots, r_d) \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$ und also

$$W(r_0, \ldots, r_d)^{-1} \begin{pmatrix} p(r_0) \\ \vdots \\ p(r_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{d+1}$$

7. **a)** Keine Musterlösung.

b) Keine Musterlösung.