# Serie 13:
# Determinanten (Teil 2)

**1.** Sei $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinear und alternierend (d.h. nicht notwendigerweise normiert). Zeigen Sie, dass $\delta = c\det$ für ein $c \in \mathbb{K}$, d.h. der Vektorraum der alternierenden multilinearen Abbildungen von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nach $\mathbb{K}$ hat Dimension 1.

*Hinweis:* Nehmen Sie zuerst an, dass $\delta(I_n) \neq 0$ und zeigen Sie, dass in diesem Falle die Behauptung ein Korollar der Eindeutigkeit der Determinanten ist. Zeigen Sie anschliessend, dass $\delta(I_n) = 0 \Rightarrow \delta = 0$, indem Sie $\delta(P)$ für Permutationsmatrizen $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bestimmen.

**2.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sei $A^\natural \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die *Adjunkte* von $A$ definiert durch

$$A^\natural_{ij} := (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ji})$$

wobei $\tilde{A}_{ji} \in M_{n-1\times n-1}(\mathbb{K})$ die Matrix erhalten aus $A$ nach Streichung der $i$-ten Spalte und der $j$-ten Zeile ist.

**a)** Zeigen Sie, dass $A^\natural A = \det(A)I_n$.

**b)** Folgern Sie, dass $\det(A) \neq 0$ impliziert, dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertierbar ist. Bestimmen Sie in diesem Falle $A^{-1}$.

**c)** Zeigen Sie, dass $(A^T)^\natural = (A^\natural)^T$ ist.

**d)** Folgern Sie für invertierbare $A^T$, dass $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

**e)** Berechnen Sie die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}$.

**Bitte wenden!**

**3.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $a, b \in \mathbb{K}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $A_n$ die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

Das heisst, für alle $n \geq 1$ ist

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : \ (A_n)_{ij} = \begin{cases} b & \text{falls } i = j \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big)$$

**4.** Die Zahlen $2014$, $1484$, $3710$ sowie $6996$ sind alle durch $106$ teilbar. Folgern Sie ohne rechnen, dass $\det(A)$ durch $106$ teilbar ist, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

**5.** **a)** Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

**b)** Zeigen Sie die Identität von Sylvester, d.h. zeigen Sie, dass für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ gilt:

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$$

*Hinweis:* Zerlegen Sie die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{smallmatrix}\right)$ auf zwei verschiedene Arten in ein Produkt von Blockdreiecksmatrizen und berechnen Sie die Determinante.

**c)** Seien $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie die Identität von Schur

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

*Hinweis:* Zerlegen Sie $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ in ein Produkt einer einfachen Blockdiagonalmatrix und Dreiecksmatrizen.

**Siehe nächstes Blatt!**

***6.** Im Folgenden sei

$$V(x_1,\dots,x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$$

für $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$, d.h. $V(x_1,\dots,x_n)$ ist die Determinante der Matrix $W(x_1,\dots,x_n)$ mit

$$W(x_1,\dots,x_n)_{ij} = x_i^{j-1} \quad (1 \le i,j \le n)$$

**a)** Bestimmen Sie $V(x_1)$ und $V(x_1,x_2)$.

**b)** Zeigen Sie, dass

$$V(x_1,\dots,x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

**c)** Zeigen Sie für $n \ge 2$

$$V(x_1,\dots,x_n) = V(x_2,\dots,x_n) \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1)$$

*Hinweis:* Verwenden Sie für $x, y \in \mathbb{K}$ und $n \ge 1$ die Formel

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$$

Wenn Sie die Formel beweisen wollen, unterscheiden Sie die Fälle $y = 0$, $y = x$ und $y \neq 0$ und berechnen Sie für $y \notin \{0, x\}$ die Summe $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k$.

**d)** Zeigen Sie

$$V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

**e)** Sei $p \in P(\mathbb{C})$ ein Polynom, so dass $p(r) \in \mathbb{Q}$ wann immer $r \in \mathbb{Q}$. Folgern Sie, dass $p \in P(\mathbb{Q})$.

**7.** Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heisst *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$.

**a)** Zeigen Sie, dass für ungerade $n \in \mathbb{N}$ und schiefsymmetrische $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(A) = 0$.

**b)** Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Finden Sie eine schiefsymmetrische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, so dass $\det(A) \neq 0$.

**Bitte wenden!**

**8. Online Abgabe Serie 13:**

**1.** Für welche Werte von $a$ besitzt das folgende Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung in $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} ax + \; y \qquad &= 0 \\ -x + ay - 2z &= 0 \\ x \qquad + \; z &= 0 \end{aligned}$$

(a) $a = 0$

(b) $a = 1$

(c) $a = 2$

(d) $a = \sqrt{2}$

**2.** Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 4

(e) 8

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen $A$ und $B$ aus $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $n \geq 2$ korrekt?

(a) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(b) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $A^{(1)}, \cdots, A^{(n)}$ von $A$ linear unabhängig sind.

(c) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

(d) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl $\lambda$ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

(e) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

**4.** Was ist die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}?$$

(a) $-4$

(b) $-2$

(c) $0$

(d) $2$

(e) $4$

**Bitte wenden!**

**5.** Welche der folgenden Aussagen über $3 \times 3$-Matrizen ist falsch?

(a) Die Determinante ist invariant unter Transposition.

(b) Die Determinante des $\lambda$-fachen einer Matrix ist das $\lambda$-fache der Determinante der Matrix.

(c) Nach Vertauschung der ersten und dritten Spalte einer Matrix wechselt das Vorzeichen der Determinante.

(d) Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten Zeile lässt die Determinante unverändert.

(e) Nach Ersetzen der ersten Spalte durch die zweite wird die Determinante $0$.

**6.** Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$$

(a) $x = 0$

(b) $x = 1$

(c) $x = 2$

(d) Keiner der obigen Vorschläge ist richtig.

**Keine Abgabe:** Diese Serie wird nicht durch die Hilfsassistenten korrigiert.