Ferienserie

2. **a)** Setze

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5\times 3}(\mathbb{Q})$$

und sei $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{Q}^3$ beliebig, dann ist $T(x) = L_A(x)$. Da x beliebig war ist T linear.

b) Wir erinnern uns, dass für $F \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ gilt $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Ker}(L_{FA})$ und wenden also elementare Zeilenumformungen auf A an:

$$A \xrightarrow[\substack{Z_4+Z_1 \\ Z_5-3Z_1}]{\substack{Z_2-2Z_1 \\ Z_3-2Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_4-2Z_3 \\ Z_5+2Z_3}]{Z_1-Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da der Rang unter elementaren Zeilenumformungen invariant ist, sehen wir, dass $\mathrm{Rang}(A) = 2$ gilt und folglich

$$\mathrm{nullity}(T) = \dim \mathbb{Q}^3 - \mathrm{Rang}(T) = 3 - \mathrm{Rang}(L_A) = 3 - \mathrm{Rang}(A) = 1$$

Jeder Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T$ im Kern erfüllt gemäss der ersten Zeile der reduzierten Matrix $x_1 + x_3 = 0$ und gemäss der zweiten Zeile $x_2 + 2x_3 = 0$. Dies trifft beispielsweise auf den Vektor $v := (1, 2, -1)^T$ zu und folglich ist $\{v = (1, 2, -1)^T\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(T)$. Wir überprüfen – dies ist eigentlich bereits bewiesen, wir kontrollieren also nur auf Rechenfehler – zur Sicherheit noch, ob v tatsächlich in $\mathrm{Kern}(T)$ liegt:

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Da $\operatorname{Rang}(A) = 2$ und da $\operatorname{Im}(T)$ das Erzeugnis der Spalten von A ist, reicht es, zwei linear unabhängige Spalten von A zu finden. Man beachte, dass eine Menge $\{u, v\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $u = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Folglich ist $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ eine Basis von $\operatorname{Im}(T)$.

d) Wir wissen, dass

$$[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^T = \left([I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_5}[I_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^T = \left([I_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^T A^T \left([I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{C}}\right)^T$$

Die Basiswechselmatrizen von einer Basis zur Standardbasis sind die Matrizen mit den entsprechenden Basisvektoren als Spalten. Entsprechend ist

$$[I_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{C}} = \left([I_{\mathbb{Q}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\begin{aligned}[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 11 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 10 & 4 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. a) Wir verwenden $U + W \subset V \Rightarrow \dim(U + W) \leq \dim V$ und erhalten

$$\begin{aligned}\dim(U \cap W) &= \dim U + \dim W - \dim(U + W) \\ &\geq \dim U + \dim W - \dim V > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - n = 0\end{aligned}$$

und folglich ist $\dim(U \cap W) \geq 1$, also $U \cap W \neq \{0\}$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir wissen

$$\begin{aligned}\dim\left({}^{U+W}\!\big/_{W}\right) &= \dim(U+W) - \dim W \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) - \dim W \\ &= \dim U - \dim(U \cap W) = \dim\left({}^{U}\!\big/_{U \cap W}\right)\end{aligned}$$

und da alle involvierten Vektorräume endliche Dimension haben, ist ${}^{U+W}/_{W} \cong {}^{U}/_{U \cap W}$.

c) Sei $p : V \to {}^{V}/_{W}$ die Projektion $v \mapsto v + W$. Wir wissen, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Folglich ist $F := p^{-1}(E) \subset V$ ein Unterraum (siehe unten), und wegen $0 \in E$ gilt $W = \operatorname{Ker}(p) \subset p^{-1}(E)$. Es gilt sicher $p(p^{-1}(E)) \subset E$, und es bleibt somit zu zeigen, dass $p(p^{-1}(E)) = E$. Sei $x \in E$, dann ist $x = v + W$ für ein $v \in V$ und somit $x = p(v)$ für ein $v \in V$. Per definitionem ist $v \in p^{-1}(E)$ und also $x \in p(p^{-1}(E))$. Da x beliebig war, folgt $E \subset p(p^{-1}(E))$ und somit ist $p(F) = E$ wie gewünscht.

Behauptung: Seien X, Y Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, sei $Z \subset Y$ ein Unterraum und sei $T \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. Dann ist $T^{-1}(Z) \subset X$ ein Unterraum.

Beweis der Behauptung: Wegen $0 \in Z$ ist $\operatorname{Ker}(T) \subset T^{-1}(Z)$ und insbesondere $0 \in T^{-1}(Z)$, also ist $T^{-1}(Z) \neq \emptyset$. Seien $v_1, v_2 \in T^{-1}(Z)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \in Z,$$

da Z ein Unterraum ist, und folglich ist $v_1 + \lambda v_2 \in T^{-1}(Z)$ und $T^{-1}(Z)$ also ein Unterraum. $\square$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}\dim\left({}^{V/W}\!\big/_{U/W}\right) &= \dim\left({}^{V}\!\big/_{W}\right) - \dim\left({}^{U}\!\big/_{W}\right) \\ &= \dim V - \dim W - \dim U + \dim W \\ &= \dim V - \dim U = \dim\left({}^{V}\!\big/_{U}\right)\end{aligned}$$

und da alle involvierten Vektorräume von endlicher Dimension sind, folgt ${}^{V/W}/_{U/W} \cong {}^{V}/_{U}$.

4. a) Im Folgenden seien Φ und Ψ wie in der Aufgabenstellung. Wir bemerken, dass $J_0^{-1} = -J_0$ und $J_0^T = -J_0$. Es gilt

$$(\Phi\Psi)^T J_0 (\Phi\Psi) = \Psi^T (\Phi^T J_0 \Phi) \Psi = \Psi^T J_0 \Psi = J_0$$

Bitte wenden!

Falls Ψ invertierbar ist, dann ist auch Ψ^T invertierbar und

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0 \Rightarrow J_0 = (\Psi^T)^{-1} J_0 \Psi^{-1} = (\Psi^{-1})^T J_0 \Psi^{-1}$$

und folglich ist $\Psi^{-1} \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$. Tatsächlich ist $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, denn es gilt

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0 \Rightarrow -J_0 \Psi^T J_0 \Psi = I_{2n}$$

Insbesondere ist $\Psi^{-1} = -J_0 \Psi^T J_0$. Daraus folgern wir, dass $\Psi^T \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, denn wegen dem vorigen Reultat ist

$$\begin{aligned} J_0 =&(\Psi^{-1})^T J_0 \Psi^{-1} = (-J_0 \Psi^T J_0)^T J_0 (-J_0 \Psi^T J_0) \\ =&J_0^T \Psi J_0^T J_0 J_0 \Psi^T J_0 = (-J_0)\Psi(-J_0)(-I_{2n})\Psi^T J_0 \\ =&- J_0 \Psi J_0 \Psi^T J_0 \\ \Rightarrow (\Psi^T)^T J_0 \Psi^T =&\Psi J_0 \Psi^T = J_0 J_0 (-J_0) = J_0 \end{aligned}$$

und folglich $\Psi^T \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$.

b) Es ist klar, dass $I_{2n} \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, und folglich besitzt die Menge $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ ein neutrales ELement. Wir haben in Teilaufgabe (a) gezeigt, dass die Menge unter Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Die Assoziativität der Verknüpfung folgt aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation auf $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$. Jedes Element in $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ besitzt nach Teilaufgabe (a) ein inverses Element (nämlich das inverse Element bezüglich Matrixmultiplikation). Folglich ist $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ eine Gruppe.

c) Wir haben in Teilaufgabe (a) eine Formel für Φ^{-1} angegeben; daraus folgt

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} =&- J_0 \Phi^T J_0 = - \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ =&- \begin{pmatrix} -B^T & -D^T \\ A^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -D^T & B^T \\ C^T & -A^T \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insbesondere ist eine 2×2-Matrix $\Phi = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ genau dann symplektisch, wenn $\Phi^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ und da im allgemeinen $\Phi^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, ist dies genau dann der Fall, wenn $\det(\Phi) = ad - bc = 1$.

d) Wir wissen, dass $\det(\Phi^{-1}) = \det(\Phi)^{-1}$. Andererseits ist $\Phi^{-1} = -J_0 \Phi^T J_0$ und folglich

$$\begin{aligned} \det(\Phi^{-1}) =&(-1)^{2n} \det(J_0 \Phi^T J_0) = \det(J_0)^2 \det(\Phi^T) \\ =&\det(-I_{2n}) \det(\Phi) = (-1)^{2n} \det(\Phi) = \det(\Phi) \end{aligned}$$

Also gilt insbesondete $\det(\Phi)^{-1} = \det(\Phi)$ und folglich $\det(\Phi) \in \{\pm 1\}$.

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Diese Matrix lässt sich ohne Anwendung von Permutationen zerlegen und man findet mit elementaren Zeilenoperationen

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{9} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{3}{29} & 1 \end{pmatrix}}_{=:L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{29}{9} & -\frac{29}{9} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{=:R}$$

b) Wegen Teilaufgabe (a) ist $\det(M) = \det(L)\det(R) = 87$ und also ist M invertierbar. Folglich ist $\mathscr{L}_{Mx=0} = \operatorname{Ker}(L_M) = \{0\}$.

6. **a)** Betrachten Sie die Standardbasis (e_1, e_2) von $\mathbb{R}^2$, dann ist $-\frac{1}{2}e_2 \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, aber $e_1 - \frac{1}{2}e_2$ und $e_2 - \frac{1}{2}e_2 = \frac{1}{2}e_2$ sind linear unabhängig. Die Aussage ist also falsch.

b) Sei W Unterraum von V mit der geordneten Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, also insbesondere $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Sei $T \in \operatorname{End}(W)$ die eindeutige lineare Abbildung, für die gilt $T(v_1) = v_1 - v_2$, $T(v_2) = v_2 - v_3$ und $T(v_3) = v_1 + v_3$. Dann ist die Darstellungsmatrix von T gegeben durch

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Und insbesondere ist

$$\det(T) = 1 * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ ist per definitionem genau dann linear unabhängig, wenn $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ linear unabhängig ist, also genau dann, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ vollen Rang besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar ist und also genau dann, wenn $2 \in \mathbb{K}^\times$, bzw. wenn $2 \neq 0$ gilt in $\mathbb{K}$.

7. **a)** Im Folgenden sei $\lambda_k := e^{2\pi i \frac{k}{N}}$. Definieren Sie die Matrix $\mathcal{F} \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ durch

$$\mathcal{F}_{kj} = \frac{1}{\sqrt{N}}\lambda_k^{j-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{(j-1)k}{N}} \qquad (1 \leq k, j \leq N)$$

Sei $(z_1, \ldots, z_N)^T \in \mathbb{C}^N$, dann ist $\mathcal{F}z \in M_{N\times 1}(\mathbb{C})$ und

$$(\mathcal{F}z)_{k1} = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{F}_{kj} z_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \lambda_k^{j-1} z_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_k^j z_{j+1} = \operatorname{DFT}(z)_k$$

Insbesondere ist $\operatorname{DFT} = L_{\mathcal{F}}$, somit linear und $[\operatorname{DFT}]_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{E}_N} = \mathcal{F}$.

Bitte wenden!

b) Zur Lösung dieser Teilaufgabe haben Sie mehrere Möglichkeiten. Beispielsweise wissen Sie aus der Analysis (Serie 11, Aufgabe 2), dass die Menge $\{\lambda_k \mid 1 \leq k \leq N\}$ genau die Menge der Nullstellen des Polynoms $X^N - 1$ ist, und dass letzteres genau N verschiedene Nullstellen besitzt. Insbesondere ist also

$$0 \neq \prod_{1 \leq k < l \leq N} (\lambda_l - \lambda_k) = \det(\mathcal{F})$$

wobei wir hier Aufgabe 6 aus Serie 12 verwendet haben.

Wenn man die entsprechende Aufgabe nicht gelöst hat, geht man wie folgt vor: Sei $f_k := \sum_{j=1}^N \lambda_k^{j-1} \varepsilon_j$, wobei $\{\varepsilon_j \mid 1 \leq j \leq N\} \subset (\mathbb{C}^N)^*$ die Koordinatenfunktionen bezüglich der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ sind, d.h. $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$. Wir zeigen, dass gilt $\cap_{k=1}^N \mathrm{Ker}(f_k) = \{0\}$ und folglich – wegen $\mathrm{DFT}(z)_k = f_k(z)$ – auch

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{DFT}) = \cap_{k=1}^N \mathrm{Ker}(f_k) = \{0\}$$

Hierfür zeigen wir, dass für alle $1 \leq k \leq N$ ein $z^{(k)} \in \mathbb{C}^N$ existiert, so dass

$$f_l(z^{(k)}) = 0 \Leftrightarrow k \neq l$$

Setze $(z^{(k)})_j = \lambda_k^{1-j}$, dann ist

$$f_l(z^{(k)}) = \sum_{j=1}^N \lambda_l^{j-1} \lambda_k^{1-j} = \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \frac{(j-1)(k-l)}{N}} = \sum_{j=1}^N \left(e^{2\pi i \frac{k-l}{N}}\right)^{j-1}$$

Falls $k = l$, dann ist also $f_l(z^{(k)}) = N \neq 0$. Sei $k \neq l$, dann ist $e^{2\pi i \frac{k-l}{N}} \neq 1$ und also

$$f_l(z^{(k)}) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{k-l}{N}}\right)^j = \frac{\left(e^{2\pi i \frac{k-l}{N}}\right)^N - 1}{e^{2\pi i \frac{k-l}{N}} - 1} = \frac{e^{2\pi i (k-l)} - 1}{e^{2\pi i \frac{k-l}{N}} - 1} = 0$$

Eine dritte Möglichkeit wäre, direkt die Inverse von DFT anzugeben und somit Teilaufgabe (b) und (c) auf einmal zu lösen.

c) Am einfachsten ist es, die Inverse (wie im wesentlichen oben getan) zu erraten. Wir behaupten, dass $L_{\overline{\mathcal{F}}^T} \circ L_{\mathcal{F}} = I_{\mathbb{C}^N}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathcal{F}}^T \mathcal{F})_{kj} &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \overline{\mathcal{F}}^T_{kr} \mathcal{F}_{rj} = \sum_{r=1}^N \overline{\mathcal{F}}_{rk} \mathcal{F}_{rj} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \overline{\lambda_r}^{k-1} \lambda_r^{j-1} = \sum_{r=1}^N e^{2\pi i \frac{(j-k)r}{N}}
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\left(e^{2\pi i\frac{r}{N}}\right)^{j-k}=\begin{cases}1 & \text{falls } j=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Also ist $\overline{\mathcal{F}}^T\mathcal{F}=I_N$ und folglich

$$L_{\overline{\mathcal{F}}^T}\circ\mathrm{DFT}=L_{\overline{\mathcal{F}}^T}\circ L_{\mathcal{F}}=L_{\overline{\mathcal{F}}^T\mathcal{F}}=L_{I_N}=I_{\mathbb{C}^N},$$

also $\mathrm{DFT}^{-1}=L_{\overline{\mathcal{F}}^T}$.

d) Man berechnet für $1\leq k\leq N$:

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}(z*y)_k&=\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}(z*y)_{j+1}=\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}y_{j+1-l}\\&=\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}\underbrace{e^{2\pi i\frac{lk}{N}}e^{-2\pi i\frac{lk}{N}}}_{=1}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1-l}\\&=\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}e^{2\pi i\frac{lk}{N}}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{(j-l)k}{N}}y_{j+1-l}\\&=\sum_{l=0}^{N-1}z_{l+1}e^{2\pi i\frac{lk}{N}}\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1}=\mathrm{DFT}(z)\cdot\mathrm{DFT}(y)\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Periodizität von $e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1}$ verwendet haben, insbesondere die Folgerung, dass

$$\forall l\in\mathbb{Z}:\ \sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{(j+l)k}{N}}y_{j+1+l}=\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}y_{j+1}$$