Ferienserie/Probeprüfung

Bemerkung: Diese Serie ist bezüglich Umfang und Struktur im Stile der Prüfung gehalten. Das heisst, die Prüfung wird aus einem grossen Block an MC-Aufgaben sowie sechs schriftlichen Aufgaben bestehen, wobei das Gewicht der MC-Aufgabe (25%) das doppelte Gewicht einer schriftlichen Aufgabe (12.5%) beträgt. Die MC-Aufgaben sind alles wahr/falsch Aufgaben. Eine richtige Antwort gibt einen Punkt, eine falsche Antwort gibt keinen Punkt. Für eine 6 werden etwa 80% der Punkte benötigt. Beachten Sie, dass der Inhalt und auch der Schwierigkeitsgrad der tatsächlichen Prüfung nicht demjenigen dieser Ferienserie entsprechen muss.

1. Multiple Choice *(30 Punkte)*

1. Sei f ein Polynom vom Grad n und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ so ist λf auch ein Polynom vom Grad n

(a) richtig

(b) falsch

2. Gegeben seien die Vektoren $u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0)$ und $w = (0, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\{u, v, w, \}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei V ein Vektorraum, sei $S \subset V$. Wenn S den Nullvektor enthält, dann ist S linear abhängig

(a) richtig

(b) falsch

4. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit mindestens drei Elementen ist linear abhängig.

(a) richtig

(b) falsch

5. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ mit höchstens zwei Elementen ist linear unabhängig.

(a) richtig

(b) falsch

6. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum hat genau eine Basis.

(a) richtig

(b) falsch

7. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = m + n$

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

8. Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $T : V \to W$ eine Abbildung. Sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von V. Wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$T(u_i + u_j) = T(u_i) + T(u_j),$$

dann ist T linear.

(a) richtig

(b) falsch

9. Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\dim(V) < \dim(W)$. Dann ist f surjektiv.

(a) richtig

(b) falsch

10. Seien A, B Matrizen über $\mathbb{K}$, so dass $AB = I_n$. Dann sind A und B invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

11. Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ invertierbar, dann ist auch $A + A^{-1}$ invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

12. Alle Einträge einer Elementarmatrix sind entweder 1 oder 0.

(a) richtig

(b) falsch

13. Die Transponierte einer Elementarmatrix ist eine Elementarmatrix

(a) richtig

(b) falsch

14. Für alle $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA)$.

(a) richtig

(b) falsch

15. Elementare Zeilenumformungen sind rangerhaltend

(a) richtig

(b) falsch

16. Eine $n \times n$-Matrix mit Rang n ist invertierbar

(a) richtig

(b) falsch

17. Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

18. Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

(a) richtig

(b) falsch

19. Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $u, v \in \mathbb{K}^m$ Vektoren. Angenommen die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = u$ und $Bx = v$ seien nicht-leer, dann ist auch die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(A + B)y = u + v$ nicht-leer.

(a) richtig

(b) falsch

20. Sei $(A \mid b)$ in Zeilenstufenform, so hat das System $Ax = b$ eine Lösung.

(a) richtig

(b) falsch

21. Der Rang einer Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

(a) richtig

(b) falsch

22. Sind die beiden Zeilen einer 2×2-Matrix A identisch, so gilt $\det(A) = 0$

(a) richtig

(b) falsch

Bitte wenden!

23. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(a) richtig

(b) falsch

24. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $\det(A) = 0$, dann sind die Zeilen $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ von A linear abhängig.

(a) richtig

(b) falsch

25. Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und sei A invertierbar, dann gilt $\det(A^{-1}B) = \frac{\det(B)}{\det(A)}$.

(a) richtig

(b) falsch

26. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(a) richtig

(b) falsch

27. Sei $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, dann gilt $\det(A + A) = \det(A) + \det(A)$.

(a) richtig

(b) falsch

28. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, dann gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(a) richtig

(b) falsch

Siehe nächstes Blatt!

29. Sei A in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

(a) richtig

(b) falsch

30. Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$, dann ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$ genau dann, wenn $\det(A) = 1$.

(a) richtig

(b) falsch

Bitte wenden!

2. *(15 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5$, gegeben durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$$

linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f.

d) Seien $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ und $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_4 + e_5, e_4 - e_5)$. Bestimmen Sie $[T^*]^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*}$.

3. *(15 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\dim(V) = n$, seien $U, W \subset V$ zwei Unterräume

a) Angenommen $\frac{n}{2} < \min\{\dim(U), \dim(W)\}$. Zeigen Sie, dass $U \cap W \neq \{0\}$.

b) Zeigen Sie, dass

$$(U + W)\big/W \cong U\big/U \cap W$$

c) Sei E ein Unterraum von V/W. Zeigen Sie, dass ein Unterraum F von V existiert, so dass $W \subset F$ und

$$E = \{v + W \mid v \in F\}$$

d) Sei $W \subset U$. Zeigen Sie, dass

$$V/W\big/U/W \cong V\big/U$$

4. *(15 Punkte)* Wir definieren die $2n \times 2n$ Matrix J_0 durch

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_n \\ I_n & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \overset{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

beachte, dass $J_0^2 = -I_{2n}$

Definition: Sei $\Psi \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ so nennen wir Ψ eine symplektische Matrix wenn $\Psi^T J_0 \Psi = J_0$ und wir schreiben $\operatorname{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ für die Menge aller symplektischen Matrizen.

Siehe nächstes Blatt!

a) Seien $\Phi, \Psi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$. Zeigen Sie, dass $\Phi\Psi$, Ψ^{-1} und Ψ^T symplektisch sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung und der Einheitsmatrix als Identität eine Gruppe ist

c) Seien $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und sei $\Phi = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\Phi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ genau dann, wenn $\Phi \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ und

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$$

Folgern Sie daraus, dass eine 2×2 Matrix genau dann symplektisch ist, wenn ihre Determinante gleich 1 ist.

d) Zeigen Sie, dass für $\Phi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ gilt $\det(\Phi)^2 = 1$. (Tatsächlich ist $\det(\Phi) = 1$ für alle $\Phi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$, aber das ist einiges komplizierter zu zeigen.)

5. *(15 Punkte)*

a) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Mx = 0$ über $\mathbb{C}$.

6. *(15 Punkte)* Im Folgenden sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

a) Sei $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ linear unabhängig und sei $w \in V$ beliebig. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{v_1 + w, \ldots, v_n + w\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $w \in \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

b) Sei $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$.

7. *(15 Punkte)* Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{DFT} :& \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N \\ DFT(z)_k =& \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{jk}{N}} z_{j+1} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie, dass DFT linear ist und bestimmen Sie $[\mathrm{DFT}]_{\mathcal{E}_N}^{\mathcal{E}_N}$.

b) Zeigen Sie, dass DFT invertierbar ist.

c) Bestimmen Sie die Inverse DFT^{-1}.

d) Erweitern Sie einen Vektor $z \in \mathbb{C}$ zu einer peridoischen Folge in $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, indem Sie die Abbildung $\{1, \ldots, N\} \to \mathbb{C}$, $k \mapsto z_k$ periodisch (mit Periode N) auf $\mathbb{Z}$ erweitern, und definieren Sie für zwei N-periodische Folgen $z, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ihre *Faltung* $z * y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ als die N-periodische Folge definiert durch

$$(z * y)_k := \sum_{j=0}^{N-1} z_{j+1} y_{k-j} \qquad 1 \le k \le N$$

Erweitern Sie $\mathrm{DFT} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ zu einem linearen Endomorphismus auf dem Vektorraum der N-periodischen Folgen. Zeigen Sie, dass

$$z * y = \mathrm{DFT}^{-1}\big(\mathrm{DFT}(z) \cdot \mathrm{DFT}(y)\big)$$

wobei wir für zwei Folgen $z, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mit $z \cdot y$ das komponentenweise Produkt bezeichnen, d.h. $(z \cdot y)_k = z_k y_k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Beachten Sie, dass sich für zwei Polynome das Produkt der Polynome als Faltung der Koeffizientenvektoren realisieren lässt (sei d der maximale Grad, dann verstehe man die Polynome als Vektoren in $\mathbb{C}^{2d}$). In der Numerik werden Sie die *Fast Fourier Transform* kennenlernen, eine Methode, mit welcher sich die diskrete Fourier Transformation DFT besonders schnell berechnen lässt und womit sich also besonders schnell Produkte von Polynomen bestimmen lassen. Das Problem ist äquivalent zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Summen gewisser Zufallsvariablen und die diskrete Fourier Transformation dementsprechend wichtig beispielsweise im Risikomanagement, aber auch in der Bildverarbeitung und überall sonst.

Keine Abgabe: Diese Serie wird nicht durch die Hilfsassistenten korrigiert. Den MC-Teil können Sie wie gewohnt online einreichen. Bitte füllen Sie diesen bis zum 19.02.2017 aus.

Zusammenfassung: Bitte beachten Sie die Deadline für die Zusammenfassung: Die endgültige Version wird, basierend auf der Stimmenvergabe im eSkript, am 14.01.2017 erstellt. Achten Sie darauf, dass Sie bis zum 13.01.2017 Ihre Präferenzen für die Zusammenstellung der Zusammenfassung geäussert haben.

Siehe nächstes Blatt!

StudyCenter in den Semesterferien: Am 4.1., 6.1., 18.1., 24.1. am 1.2. wird in den Räumen HG G 19.1 und 19.2 von 13:00 bis 18:00 Uhr ein StudyCenter angeboten. Dieses wird jeweils von 14:00 bis 16:00 Uhr durch Hilfsassistierende der linearen Algebra betreut.

Prüfung: Bitte bringen Sie zur Prüfung genügend eigenes Papier sowie blaue oder schwarze Kugelschreiber oder Füllfedern mit. Sie dürfen in der Prüfung keine roten oder grünen Kugelschreiber verwenden. Es sind keine Unterlagen oder Taschenrechner zugelassen. Die Zusammenfassung wird durch uns verteilt.